Улучшение живучести системы с помощью дублирования путей

И. Б. Бурдонов, ORCID: 0000-0001-9539-7853 <*igor@ispras.ru*>[a]
Н. В. Евтушенко, ORCID: 0000-0002-4006-1161 <*evtushenko@ispras.ru*>[a,b]
А. С. Косачев, ORCID: 0000-0001-5316-3813 <*kos@ispras.ru*>[a]
[a]*Институт системного программирования РАН им. В.П. Иванникова,*
109004, Россия, г. Москва, ул. А. Солженицына, д. 25.
[b]*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,*
101000, Россия, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20.

Аннотация. Исследуется проблема живучести распределённых сетей. Распределённая система моделируется конечным связным неориентированным графом, вершины которого делятся на два типа: хосты и коммутаторы. Хосты выполняют вычислительные функции, а коммутаторы обеспечивают доставку сообщений между хостами. Под живучестью системы понимается её способность выполнять свои основные функции по передаче сообщений после выхода из строя некоторых рёбер графа. Решение проблемы живучести системы обеспечивается дублированием путей, используемых для передачи сообщений. Основным условием корректного решения является отсутствие зацикливания сообщений в сети при выбранных основных и дублирующих путях. Доказывается теорема о четырёх путях для случая одного хоста-отправителя и двух хостов-получателей: если для каждого из двух хостов-получателей существуют два непересекающихся по рёбрам пути из хоста-отправителя в этот хост-получатель, то можно выбрать эти четыре пути такими, что зацикливания сообщений не возникнет.

Ключевые слова: распределённые системы; программно-конфигурируемые сети; маршрутизация пакетов; живучесть системы, дублирование путей.

Для цитирования: Бурдонов И.Б., Евтушенко Н.В., Косачев А.С. Улучшение живучести системы с помощью дублирования путей. ж. «Программирование», № 4, 2025.

Improving System Survivability by Path Duplication

I.B. Burdonov ORCID: 0000-0001-9539-7853 <*igor@ispras.ru*>[a]
N.V. Yevtushenko ORCID: 0000-0002-4006-1161 <*evtushenko@ispras.ru*>[a,b]
A.S. Kossatchev ORCID: 0000-0001-5316-3813 <*kos@ispras.ru*>[a]
[a]*Institute for System Programming of the Russian Academy of Sciences,*
25, Alexander Solzhenitsyn st., Moscow, 109004, Russia.
[b]*National Research University Higher School of Economics,*
20, Myasnitskaya st., Moscow, 101000, Russia.

Abstract. In this paper, the problem of the distributed network survivability is investigated. A distributed system is modeled by a finite connected undirected graph whose nodes are divided into two types: hosts and switches. Hosts perform computational functions, while switches are utilized for providing the message delivery between hosts. The system survivability is considered as the system ability to perform the main functions of message transmission after graph edges' failures. The solution for the system survivability is provided by duplicating the paths for message transmitting. The main condition for the correct solution is the absence of message looping in the network for any set of selected paths. The four-path theorem is proved for the case of two recipient hosts: if for each recipient host there are two paths from the sending host and the edge sets traversed by these paths are disjoint, then there is no message looping for this set of the paths.

Keywords: distributed systems; software-defined networks; packet routing; system survivability; path duplication.

For citation: Burdonov I.B., Yevtushenko N.V., Kossatchev A.S. Improving system survivability by path duplication. «Programming and Computer Software», № 4, 2025.

1. Введение

Одной из проблем распределённых сетей является их живучесть, в частности, такая проблема возникает в программно-конфигурируемых сетях (software-defined networking, SDN). Под живучестью системы обычно понимается её способность выполнять основные функции, несмотря на действие возмущений [1]. В настоящей работе в качестве модели распределённой системы рассматривается конечный связный неориентированный граф, вершины которого делятся на два типа: хосты и коммутаторы. Хосты выполняют вычислительные функции, а коммутаторы обеспечивают доставку сообщений между хостами. Под возмущением будем понимать выход из строя ребра (или рёбер) графа, когда становится невозможным передавать сообщения по путям, проходящим через это ребро (эти рёбра). Для того чтобы система по-прежнему выполняла свои функции, т.е. доставляла сообщения между хостами, нужно, чтобы для каждого пути, используемого для передачи сообщений и проходящего через вышедшее из строя ребро, существовал дублирующий путь, ведущий из того же хоста-отправителя в тот же хост-получатель, но не проходящий по этому ребру. Иными словами, живучесть системы обеспечивается дублированием путей, используемых для передачи сообщений.

В общем случае для каждого ребра основного пути должен существовать дублирующий путь, не проходящий по этому ребру (и, возможно, другим рёбрам основного пути), и таких дублирующих путей может быть несколько. Например, на рис. 1 для основного пути 1234 есть два дублирующих пути: 1534, обходящий рёбра 12 и 23, и 1264, обходящий рёбра 23 и 34. Однако на этом же рисунке видно, что эти два дублирующих пути 1534 и 1264 не имеют общих рёбер; поэтому если один из них выбрать в качестве основного, а другой в качестве дублирующего, то понадобятся не три пути (1234, 1534, 1264), а два пути (1534 и 1264).

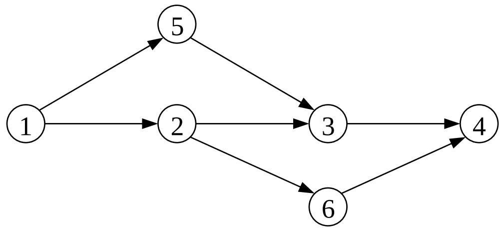


Рис. 1.Дублирующие пути.

В разделе 4 статьи мы покажем, что ситуация, иллюстрируемая примером на рис. 1, носит общий характер: если для каждого ребра основного пути есть дублирующий путь, не проходящий по этому ребру, то в графе существуют два непересекающиеся по рёбрам пути, начинающиеся и заканчивающиеся там же, где начинается и заканчивается основной путь. Поэтому в данной статье мы будем рассматривать случай, когда для каждого основного пути используется ровно один дублирующий путь, не имеющий общих рёбер с основным путём. Выход из строя любого ребра (рёбер) на основном пути не нарушит функциональности системы, поскольку сообщение будет доставлено по дублирующему пути. Сообщение передаётся по обоим путям, так что при отсутствии сбоев хост-получатель получит это сообщение дважды. Предполагается, что повторные сообщения хост-получатель игнорирует. И только в том случае, когда выйдет из строя ребро (или несколько рёбер) на одном из этих двух путей (основном или дублирующем), хост-получатель получит сообщение один раз. Тем самым, основной и дублирующий пути равноправны, так что имеет смысл говорить просто о двух непересекающихся по рёбрам путях с общим началом и общим концом.

В общем случае сообщение от данного хоста-отправителя может передаваться не одному, а нескольким хостам-получателям. Это значит, что коммутаторы должны обеспечить прохождение этого сообщения по нескольким путям из одного хоста-отправителя в каждый из хостов-получателей. В точках (коммутаторах) разветвления этих путей происходит клонирование сообщения, когда коммутатор, приняв сообщение, направляет его дальше по нескольким рёбрам. Тем самым, имеется несколько основных путей из одного хоста-отправителя в несколько хостов-получателей, и для каждого из этих путей должен иметься дублирующий его путь, не пересекающийся по рёбрам с основным путём.

Известно (теорема Менгера [2]), что двусвязный граф обеспечивает доставку любого сообщения из любого хоста в любой другой хост по двум непересекающимся по рёбрам путям, т.е. полное дублирование. Однако при этом может возникнуть зацикливание, когда сообщение бесконечно двигается по некоторому циклу в графе. Дело в том, что коммутатор «знает» только своих соседей, и его настройки определяют для каждого данного соседа, каким соседям следует переслать сообщение, полученное от данного соседа. Более формально, правило настройки коммутатора s имеет вид (a, s, b) и означает, что сообщение, полученное от соседа a, следует отправить соседу b. Если у коммутатора s есть несколько правил, отличающихся только соседом-получателем, (a, s, b_1), (a, s, b_2), ..., (a, s, b_n), то сообщение будет клонировано и передано всем этим соседям $b_1, b_2, ..., b_n$.

Пример зацикливания приведён на рис. 2. Здесь есть два непересекающихся по рёбрам пути из хоста-отправителя 1 в хост-получатель 6: основной путь 123456 и дублирующий путь 16 и два непересекающихся по рёбрам пути из того же хоста-отправителя 1 в другой хост-получатель 7: основной путь 17 и дублирующий путь 145237. Основные пути не имеют общих рёбер, поэтому на них зацикливание не возникает. Точно также дублирующие пути не имеют общих рёбер, поэтому на них зацикливание тоже не возникает. Однако на совокупности основных и дублирующих путей возникает зацикливание. Действительно, коммутатор 3, получив сообщение от коммутатора 2, пересылает его коммутатору 4 и хосту 7, а коммутатор 5, получив сообщение от коммутатора 4, пересылает его коммутатору 2 и хосту 6. Из-за этого сообщение, пройдя путь 12345, снова возвращается в коммутатор 2, далее проходит путь 2345, снова возвращается в коммутатор 2, и так далее, т.е. проходит путь из хоста 1 в коммутатор 2 и далее бесконечно по циклу 2345. Вопрос появления зацикливаний при передаче сообщений подробно обсуждается в [3]-[6]. В частности, показано, что если множество путей образует дерево, ориентированное от корня, т.е. для любых двух путей их общие рёбра лежат только на их общем префиксе, то на этом множестве путей зацикливание не возникает.

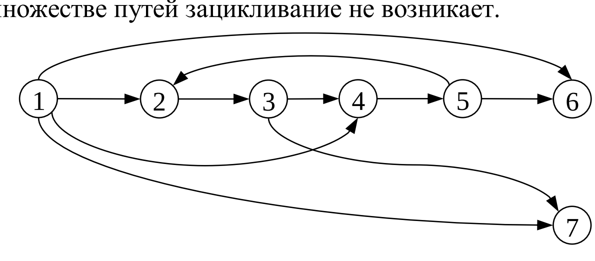


Рис. 2.Зацикливание.

С другой стороны, известно [7], что четырёхсвязный граф обеспечивает существование двух непересекающихся по рёбрам остовных деревьев, одно из которых можно выбрать основным, а другое дублирующим. Тогда тоже можно доставить любое сообщение из любого хоста в любой другой хост по двум непересекающимся по рёбрам путям, т.е. полное дублирование, используя пути на этих деревьях. Зацикливание не происходит, поскольку деревья не пересекаются по рёбрам, а общие рёбра любых двух путей одного дерева лежат только на их общем префиксе. Таким образом, условие четырёхсвязности графа достаточно для выбора дублирующих путей. Однако оно слишком сильное, т.е. не является необходимым, что и показано в настоящей статье

В статье рассматривается случай одного хоста-отправителя и двух хостов-получателей. В предположении, что для каждого из хостов-получателей существуют два непересекающихся по рёбрам пути из хоста-отправителя в этот хост-получатель, показывается, что можно выбрать эти четыре пути такие, что зацикливание не возникает. В разделе 2 вводятся базовые определения и обозначения. В разделе 3 вводится аппарат «арок» (обходных путей), который используется в последующих разделах, и формулируется (и доказывается) ряд свойств конструкции «цепь арок». В разделе 4 показано, что для решения задачи построения дублирующих путей можно ограничиться вершинно-простыми путями (такой путь не проходит через одну вершину дважды), а вместо нескольких дублирующих путей использовать один дублирующий путь, не пересекающийся по рёбрам с основным путём. Раздел 4 основной: в нем доказывается теорема о четырёх путях. Раздел 5 (заключение) подводит итоги и намечает пути дальнейших исследований.

2. Базовые определения и обозначения

Графы будем обозначать буквой G, вершины и дуги — буквами a, b, c, d, x, y, z, s, t, пути — буквами o, p, q, r, u, v, w, множества вершин или путей — соответствующими прописными буквами. Буквы i, j, k, m, n используются для целых неотрицательных чисел. Также будут использоваться нижние индексы, штрих «`», карет «^» и звёздочка «*».

Рассматривается связный неориентированный конечный граф $G = (V, E)$ без кратных дуг и петель, где V множество вершин, а $E \subseteq \{ \{a, b\} \mid a \in V \,\&\, b \in V \,\&\, a \neq b \}$ множество рёбер.

Ребро $\{a, b\}$ будем понимать также как две разнонаправленные дуги ab и bc. Началом (начальной вершиной) дуги ab называют вершину a, а концом (конечной вершиной) — вершину b. Начало и конец дуги ab называют концами ребра $\{a, b\}$.

Поскольку граф не содержит кратных рёбер и петель, (конечный) путь p можно понимать как непустую последовательность соседних вершин, т.е. $\{ p(i), p(i + 1) \} \in E$ для $i = 1..\ |p| - 1$, величина $|p| - 1$ называется длиной пути. Путь пустой, если $|p| = 1$, т.е. имеет длину 0; это то же самое, что вершина. Путь длиной 1 то же самое, что дуга.

Вершиной пути p называется вершина $p(i)$, где $i = 1..\ |p|$; говорят, что путь p проходит через эту вершину, а эта вершина (лежит) на пути p. Началом (начальной вершиной) пути p называют вершину $p(1)$, а концом (конечной вершиной) — вершину $p(|p|)$. Говорят, что путь ведёт из его начала в его конец. Путь, ведущий из вершины a в вершину b, будем называть ab-путём. Внутренней вершиной пути называют его вершину, отличную от его начала и его конца, т.е. вершину $p(i)$, где $1 < i < |p|$.

Дугой пути p называется дуга $p(i)p(i + 1)$ для $i = 1..\ |p| - 1$; говорят, что путь p проходит по этой дуге, а эта дуга (лежит) на пути p. Ребром пути p называется ребро $\{ p(i), p(i + 1) \}$ для $i = 1..\ |p| - 1$; говорят, что путь p проходит по этому ребру, а это ребро (лежит) на пути p.

Простым по дугам путём будем называть путь p, все дуги которого попарно разные, т.е. для $i = 1..\ |p| - 1$, $j = 1..\ |p| - 1$, $i \neq j$ имеет место $p(i)p(i + 1) \neq p(j)p(j + 1)$.

Простым по рёбрам (или *рёберно-простым*) путём называется путь p, все рёбра которого попарно разные, т.е. для $i = 1..\ |p| - 1$, $j = 1..\ |p| - 1$, $i \neq j$ имеет место $\{ p(i), p(i + 1) \} \neq \{ p(j), p(j + 1) \}$. Рёберно-простой путь является простым по дугам, обратное не всегда верно, например, путь aba простой по дугам, но не простой по рёбрам.

Простым по вершинам (или *вершинно-простым*) путём (не циклом) будем называть путь p, все вершины которого попарно разные, т.е. для $i = 1..\ |p|$, $j = 1..\ |p|$, $i \neq j$ имеет место $p(i) \neq p(j)$. Вершинно-простой путь является рёберно-простым и, следовательно, простым по дугам.

Два пути p и q будем называть *непересекающимися по дугам*, если они не имеют общих дуг, т.е. не проходят по одной дуге, т.е. для $i = 1..\ |p| - 1$, $j = 1..\ |q| - 1$ имеет место $p(i)p(i + 1) \neq q(j)q(j + 1)$.

Два пути p и q называются *непересекающимися по рёбрам* (или *рёберно непересекающимися*), если они не имеют общих рёбер, т.е. не проходят по одному ребру, т.е. для $i = 1..\ |p| - 1$, $j = 1..\ |q| - 1$ имеет место $\{ p(i), p(i + 1) \} \neq \{ q(j), q(j + 1) \}$.

Два пути p и q будем называть *непересекающимися по вершинам* (или *вершинно непересекающимися*), если они не имеют общей вершины, которая хотя бы в одном из этих путей является внутренней, т.е. для $i = 1..\ |p|$, $j = 1..\ |q|$ имеет место $p(i) \neq q(j)$, кроме, возможно, случаев $i = 1$ или $i = |p|$ и $j =1$ или $j = |q|$.

Конкатенацией путей p и q таких, что конец p совпадает с началом q, т.е. $p(|p|) = q(1)$, называется путь r такой, что $|r| = |p| + |q| -1$ (длина пути r равна сумме длин путей p и q) и $r(i) = p(i)$ для $i = 1..|p|$, $r(|p| + i) = q(i + 1)$ для $i = 1..|q| - 1$. Конкатенацию путей p и q будем обозначать $p \cdot q$. Будем говорить, что конкатенация происходит по вершине $p(|p|) = q(1)$.

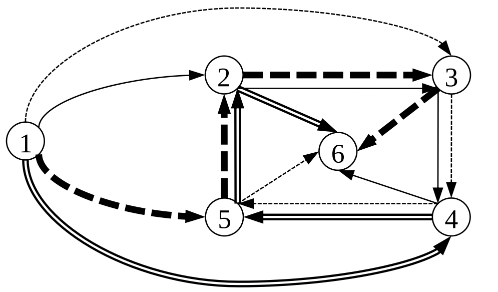
Отрезком пути p будем называть путь $p[i, j] = p(i)...p(j)$, где $i = 1..\ |p|$, $j = 1..\ |p|$. Если $i = 1$, отрезок называется *префиксом*; если $j = |p|$, отрезок называется *постфиксом*. Отрезок *прямой*, если $i \leq j$, т.е. $p[i, j] = p(i)p(i + 1)\ldots p(j)$, и *обратный*, если $i \geq j$, т.е. $p[i, j] = p(i)p(i - 1)\ldots p(j)$, пустой отрезок (одна вершина, без рёбер) обратен самому себе. По умолчанию под отрезком понимается прямой отрезок.

Путь p *вложен* в путь q, если путь p является отрезком пути q. Путь p *строго вложен* в путь q, если путь p вложен в путь q и $p \neq q$. Отношение вложенности путей, очевидно, является частичным порядком.

Если вершинно-простой путь p проходит по вершинам $a = p(i)$ и $b = p(j)$, то отрезок $p[i, j]$ будем обозначать также как $p(a, b)$. Если путь не вершинно-простой, то такое обозначение, вообще говоря, неоднозначно определяет отрезок пути; в частности, для пути $p = p_1 \cdot q \cdot p_2$, где $q(1) = q(|q|) = a$, обозначение $p(a, a)$ означает и пустой путь в вершине a, и цикл q.

Введём специальную операцию *конкатенации-по-дуге*, которую обозначим «$\cdot\cdot$». Она применима к двум путям, первый из которых $p\cdot ab$ заканчивается дугой ab, с которой начинается второй путь $ab\cdot q$: $(p\cdot ab)\cdot\cdot(ab\cdot q) = p\cdot ab\cdot q$. Определим *замыкание* $p{\downarrow}ab{\uparrow}q$ пары путей $\{p, q\}$ *по дуге* ab [8][9] следующим образом. Если по дуге ab проходит не более одного из путей p и q, то замыкание по этой дуге $p{\downarrow}ab{\uparrow}q = \{p, q\}$. Если оба пути p и q проходят по дуге ab, т.е. $p = p_1\cdot ab\cdot p_2$ и $q = q_1\cdot ab\cdot q_2$, то $p{\downarrow}ab{\uparrow}q = \{(p_1\cdot ab)\cdot\cdot(ab\cdot p_2), (p_1\cdot ab)\cdot\cdot(ab\cdot q_2), (q_1\cdot ab)\cdot\cdot(ab\cdot p_2), (q_1\cdot ab)\cdot\cdot(ab\cdot q_2)\} = \{p, p_1\cdot ab\cdot q_2, q_1\cdot ab\cdot p_2, q\}$. Будем говорить, что множество P путей *замкнуто по дугам*, если в него вложено замыкание по дугам любой пары путей из множества P по любой дуге. *Замыканием по дугам* множества P путей называется минимальное замкнутое по дугам надмножество множества P, которое будем обозначать $P{\downarrow\uparrow}$. Множество P путей замкнуто по дугам, если $P{\downarrow\uparrow} = P$. Замкнутое по дугам множество путей конечно тогда и только тогда, когда все его пути простые по дугам, в частности, вершинно-простые. Будем говорить, что на множестве путей P возникает *зацикливание*, если его замыкание по дугам $P{\downarrow\uparrow}$ бесконечно.

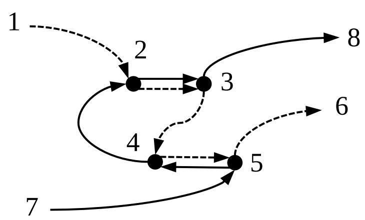
Замыкание по дугам конечного множества даже вершинно-простых путей может быть бесконечным, т.е. содержать не простой по дугам путь. Пример на рис. 3. Рассмотрим пути 12346 и 13456. По определению, замыканию этих путей по дуге 34 принадлежат пути 123456 и 1346. Рассмотрим замыкание по дуге 45 полученного пути 123456 и пути 14526. Этому замыканию принадлежит путь 1234526. Рассмотрим замыкание по дуге 52 полученного пути 1234526 и пути 15236. Этому замыканию принадлежит путь 12345236, который не является простым по дугам (дуга 23 повторяется дважды), и, следовательно, замыканию принадлежит бесконечное множество путей $1(2345)^*6$.



Вершинно-простые пути 12346, 13456, 14526, 15236.
При замыкании по дугам возникает бесконечное число путей $1(2345)^*6$:
$123456 \in 12\mathbf{34}6{\downarrow}34{\uparrow}13\mathbf{45}6$,
$1234526 \in 123456{\downarrow}45{\uparrow}14\mathbf{52}6$,
$12345236 \in 1234526{\downarrow}52{\uparrow}15\mathbf{23}6$.

Рис. 3.Пример, когда замыкание по дугам конечного множества вершинно-простых путей бесконечно.

Замыкание по дугам вершинно-простых путей может содержать не рёберно-простые пути даже в том случае, когда оно конечно, т.е. все его пути просты по дугам. Пример на рис. 4.



Пути 123456 (пунктиром) и 754238 (сплошной линией) вершинно-простые.
В замыкании по дугам есть не рёберно-простой путь 75423456,
но все пути в замыкании простые по дугам.

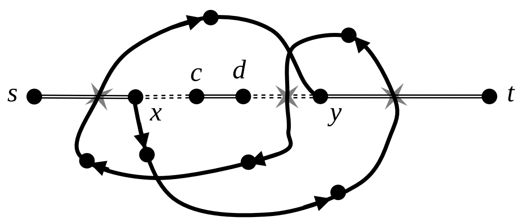
Рис. 4.Конечное замыкание по дугам вершинно-простых путей содержит не рёберно-простой путь.

На вершинах вершинно-простого пути p с началом в вершине s введём отношение «*ближе*» (к началу пути, вершине s), которое будем обозначать знаком «$<_p$»: $p(i) <_p p(j)$, если $i < j$. Соответственно, вводятся отношения «*дальше*» $p(i) >_p p(j)$, если $i > j$, «*не дальше*» $p(i) \le_p p(j)$, если $i \le j$, «*не ближе*» $p(i) \ge_p p(j)$, если $i \ge j$. Также введём отношение «*ближе*» (к вершине s) для дуг пути p: $p(i)p(i + 1) <_p p(j)p(j + 1)$, если $i < j$. Соответственно, вводятся отношения «*дальше*» $p(i)p(i + 1) >_p p(j)p(j + 1)$, если $i > j$, «*не дальше*» $p(i)p(i + 1) \le_p p(j)p(j + 1)$, если $i \le j$, «*не ближе*» $p(i)p(i + 1) \ge_p p(j)p(j + 1)$, если $i \ge j$. Аналогично определяются отношения для рёбер пути p: «*ближе*» (к вершине s) $\{p(i), p(i + 1)\} <_p \{p(j), p(j + 1)\}$, если $i < j$, «*дальше*» $\{p(i), p(i + 1)\} >_p \{p(j), p(j + 1)\}$, если $i > j$, «*не дальше*» $\{p(i), p(i + 1)\} \le_p \{p(j), p(j + 1)\}$, если $i \le j$, «*не ближе*» $\{p(i), p(i + 1)\} \ge_p \{p(j), p(j + 1)\}$, если $i \ge j$. Очевидно, все эти отношения для вершин, дуг и рёбер являются отношениями линейного порядка (нестрогого для отношений «не …»).

3. Цепь арок

В этом и следующем разделах будет рассматриваться конечный неориентированный связный граф, в котором вершины делятся на два типа: хосты и коммутаторы. Будут рассматриваться только пути, внутренние вершины которых являются коммутаторами.

Рассмотрим вершинно-простой путь p. Назовём *xy-аркой* для пути p вершинно-простой путь в графе, все рёбра которого не лежат на пути p, начало x и конец y лежат на пути p, вершина x лежит ближе к началу пути p, чем вершина y, т.е. $x <_p y$. Будем говорить, что дуга cd, лежащая на пути p, *обходится* xy-аркой, если $x \le_p c <_p d \le_p y$. См. рис. 5. Заметим, что в общем случае арка может обходить не одну, а несколько дуг пути p, и иметь внутренние вершины, общие с путём p.



st-путь p (двойная линия),
xy-арка (жирная линия), обходящая дугу cd на пути p,
знаком ✶ выделены общие внутренние вершины арки и пути p,
пунктиром выделены отрезки на пути p между вершинами x и y, которые могут быть пустыми.

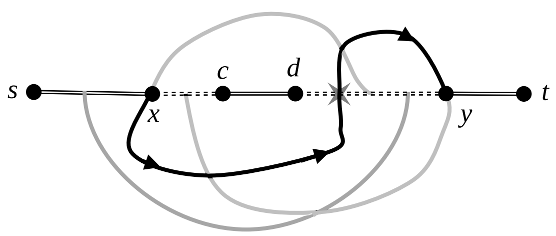
Рис. 5. xy-арка, обходящая дугу cd на пути p.

Будем говорить, что две арки *эквивалентны*, если они имеют общее начало и общий конец. Для арок определим специальное отношение «*больше*»: xy-арка больше $x`y`$-арки, если отрезок $p(x`, y`)$ строго вложен в отрезок $p(x, y)$, т.е. либо $x <_p x`$ и $y` \leq_p y$, либо $x \leq_p x`$ и $y` <_p y$. Очевидно, это отношение является строгим частичным порядком на классах эквивалентности арок. *Максимальной* xy-аркой, обходящей дугу cd, лежащую на пути p, будем называть арку, которая обходит дугу cd и максимальна по отношению «больше» среди всех арок, обходящих дугу cd, а конец y этой арки максимален по отношению «$<_p$», т.е. расположен дальше всего от вершины s на пути p. Очевидно, что максимальная арка, обходящая дугу cd, единственна с точностью до эквивалентности арок среди всех арок, обходящих дугу cd.

Лемма 1. Максимальная xy-арка, обходящая дугу cd, имеет общие вершины с путём p только на отрезке $p(x, y)$.

Доказательство. См. рис. 6. Допустим максимальная xy-арка v имеет общую вершину с путём p не на отрезке $p(x, y)$. Тогда арку v можно представить в виде $v = v(x, z)\cdot v(z, y)$, где вершина z лежит на пути p и $z <_p x$ или $z >_p y$. Но тогда существует путь, соответственно, $v(z, y)$ или $v(x, z)$, который, очевидно, является аркой, которая также обходит дугу cd, но больше арки v, что противоречит максимальности арки v.

□



st-путь p (двойная линия),
максимальная xy-арка (жирная чёрная линия), обходящая дугу cd,
знаком ✶ выделены общие внутренние вершины арки и отрезка $p(x, y)$,
пунктиром выделены отрезки на отрезке $p(x, y)$, которые могут быть пустыми,
серыми линиями нарисованы примеры не максимальных арок, обходящих дугу cd.

Рис. 6. Максимальная xy-арка, обходящая дугу cd на пути p.

Пусть имеется вершинно-простой st-путь p и его вершина $a \neq s$. *Цепью арок* (для пути p и вершины a) будем называть последовательность арок (для пути p) $v_1, \ldots, v_k$, $k \geq 1$, такую, что (см. рис. 7):

Для $k = 1$: Арка v_1 является x_1y_1-префиксом максимальной арки, обходящей первую дугу пути p, т.е. дугу $sp(2)$, $x_1 = p(1) = s$, $p(2) \leq_p a \leq_p y_1$, и арка v_1 имеет одну общую вершину y_1 с отрезком $p(a, y_1)$.

Для $k = 2$: Арка v_1 является максимальной x_1y_1-аркой, обходящей первую дугу пути p, т.е. дугу $sp(2)$, $x_1 = p(1) = s$, $p(2) \leq_p y_1 <_p a$. Арка v_2 является x_2y_2-префиксом максимальной арки, обходящей дугу пути p, начинающуюся в вершине y_1, т.е. дугу $y_1p(y_1, t)(2)$, $a \leq_p y_2$, и арка v_2 имеет одну общую вершину y_2 с отрезком $p(a, y_2)$.

Для $k \geq 3$:
1) Арка v_1 является максимальной x_1y_1-аркой, обходящей первую дугу пути p, т.е. дугу $sp(2)$, $x_1 = p(1) = s$, $p(2) \leq_p y_1$.
2) Арка v_i, $i = 2..k - 1$, является максимальной x_iy_i-аркой, обходящей дугу пути p, начинающуюся в вершине y_{i-1}, т.е. дугу $y_{i-1}p(y_{i-1}, t)(2)$.
3) $y_{k-1} <_p a$.
4) Арка v_k является префиксом максимальной арки, обходящей дугу пути p, начинающуюся в вершине y_{k-1}, т.е. дугу $y_{k-1}p(y_{k-1}, t)(2)$, $a \leq_p y_k$, и с отрезком $p(a, y_k)$ имеет одну общую вершину y_k.

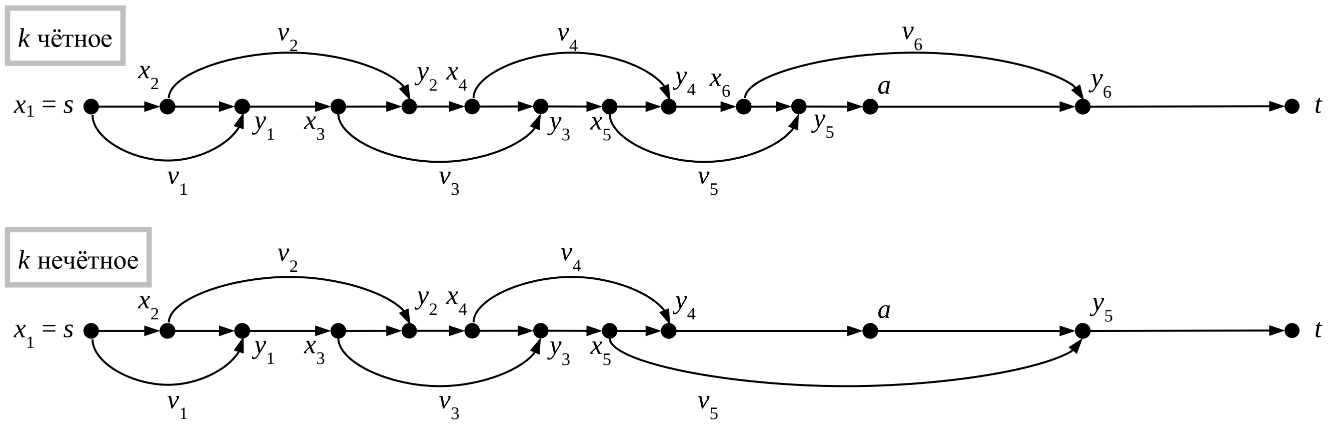


Рис. 7. Цепь арок.

Лемма 2. Если для вершинно-простого st-пути p и его вершины $a \neq s$ существует цепь арок $v_1, \ldots, v_k$, $k \geq 1$, то имеют место неравенства:

Для $k = 1$: $(x_1 = s) <_p a \leq_p y_1$.

Для $k = 2$: $(x_1 = s) <_p x_2 <_p y_1 <_p a \leq_p y_2$.

Для $k \geq 3$: $(x_1 = s) <_p x_2 <_p y_1 <_p x_3 <_p y_2 <_p \ldots <_p y_{i-2} <_p x_i <_p y_{i-1} <_p \ldots <_p x_k <_p y_{k-1} <_p a \leq_p y_k$.

Доказательство. Достаточно показать, что

1) для $k = 1$: $(x_1 = s) <_p a \leq_p y_1$,
2) для $k \geq 2$: $(x_1 = s) <_p x_2 <_p y_1$, $y_{k-1} <_p a \leq_p y_k$.
3) для $k \geq 3$: $y_{i-2} <_p x_i <_p y_{i-1}$ для $i = 3..k$.

1). Непосредственно следует из определения цепи арок для случая $k = 1$: $(x_1 = s) <_p a \leq_p y_1$.

2). Очевидно, $(x_1 = s) \leq_p x_2$ для $k \geq 2$. Поскольку арка v_2 обходит дугу пути p, начинающуюся в вершине y_1, имеем $y_1 <_p y_2$. Если бы было $(x_1 = s) = x_2$, то арка v_2 обходила бы первую дугу пути p (начинающуюся в вершине s), что, учитывая $y_1 <_p y_2$, противоречит тому, что в случае $k \geq 2$ арка v_1 максимальная, обходящая первую дугу пути p. Следовательно, $(x_1 = s) <_p x_2$. Поскольку арка v_2 обходит дугу пути p, начинающуюся в вершине y_1, имеем $x_2 \leq_p y_1$. Если бы было $x_2 = y_1$, то путь $v_1 \cdot v_2$ был бы аркой, обходящей первую дугу пути p, что, учитывая $y_1 <_p y_2$, противоречит тому, что в случае $k \geq 2$ арка v_1 максимальная, обходящая первую дугу пути p. Следовательно, $x_2 <_p y_1$. Имеем $(x_1 = s) <_p x_2 <_p y_1$. Также для случая $k \geq 2$ из определения цепи арок для случаев $k = 2$ и $k \geq 3$ непосредственно следует $y_{k-1} <_p a \leq_p y_k$.

3) Для $k \geq 3$ и $i = 3..k$, поскольку арка v_i обходит дугу пути p, начинающуюся в вершине y_{i-1}, имеем $y_{i-1} <_p y_i$. Если бы было $y_{i-2} \geq_p x_i$, то путь v_i был бы аркой, обходящей дугу пути p, начинающуюся в вершине y_{i-2}, что, учитывая $y_{i-1} <_p y_i$, противоречит тому, что в случае $k \geq 3$ по определению цепи арок арка v_{i-1} максимальная, обходящая дугу пути p, начинающуюся в вершине y_{i-2}. Следовательно, $y_{i-2} <_p x_i$. Поскольку арка v_i обходит дугу пути p, начинающуюся в вершине y_{i-1}, имеем $x_i \leq_p y_{i-1}$. Если бы было $x_i = y_{i-1}$, то путь $v_{i-1} \cdot v_i$ был бы аркой, обходящей дугу пути p, начинающуюся в вершине y_{i-2}, что, учитывая $y_{i-1} <_p y_i$, противоречит тому, что в случае $k \geq 3$ по определению цепи арок арка v_{i-1} максимальная, обходящая дугу пути p, начинающуюся в вершине y_{i-2}. Следовательно, $x_i <_p y_{i-1}$. Имеем $y_{i-2} <_p x_i <_p y_{i-1}$.

□

Лемма 3. Если для вершинно-простого st-пути p и его вершины $a \neq s$ существует цепь арок $v_1, \ldots, v_k$, $k > 1$, то любые две разные арки v_i и v_j, $i \neq j$, не имеют общих вершин и рёбер.

Доказательство. Если бы две арки v_i и v_j, $i = 1..k$, $j = 1..k$, $i < j$, имели общую вершину z, то эти арки можно было бы представить в виде $v_i = u_i \cdot z \cdot w_i$, $v_j = u_j \cdot z \cdot w_j$. Рассмотрим путь $u_i \cdot z \cdot w_j$. Этот путь ведёт из вершины x_i в вершину y_j, а по лемме 2 имеет место $y_j >_p y_i$. Тогда путь $u_i \cdot z \cdot w_j$ является аркой, обходящей все дуги, которые обходятся аркой v_i. При этом арка $u_i \cdot z \cdot w_j$ больше арки v_i, поскольку $y_j >_p y_i$, что противоречит максимальности арки v_i, которая максимальна, поскольку не последняя, так как $i < k$. Мы пришли к противоречию и, следовательно, арки не имеют общих вершин. А тогда они не имеют и общих рёбер.

□

Пусть для вершинно-простого st-пути p и его вершины $a \neq s$ существует цепь арок $v_1, \ldots, v_k$, $k \geq 1$. Пусть также вершина b лежит на пути p и $a \leq_p b \leq_p t$. Обозначим $y_0 = s$, $x_{k+1} = a$, $x_{k+2} = b$. Для $i = 2..k+2$ назовём $y_{i-2}x_i$-*связкой* отрезок $r_i = p(y_{i-2}, x_i)$ пути p. Заметим, что все связки являются прямыми отрезками пути p, за исключением $y_k x_{k+2}$-связки r_k в случае $b <_p y_k$. Заметим также, что для $k = 1$ есть ровно две связки $p(y_0, x_{k+1}) = p(s, a)$ и $p(y_1, x_{k+2}) = p(y_1, b)$. См. рис. 8.

Лемма 4. Если для вершинно-простого st-пути p и его вершины $a \neq s$ существует цепь арок $v_1, \ldots, v_k$, $k \geq 1$, вершина b лежит на пути p и $a \leq_p b \leq_p t$, то любые две разные связки r_i и r_j, $i \neq j$, не имеют общих вершин и рёбер.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из определения связок, леммы 2 и условия $a \leq_p b$.

□

Лемма 5. Если для вершинно-простого st-пути p и его вершины $a \neq s$ существует цепь арок $v_1, \ldots, v_k$, $k \geq 1$, вершина b лежит на пути p и $a \leq_p b \leq_p t$, то любая арка v_i и любая связка r_j 1) не имеют общих рёбер, и 2) не имеют общих вершин, если i и j оба чётные или оба нечётные, за исключением случая $j = i$, когда конец связки r_i совпадает с началом арки v_i, и случая $j = i + 2$, когда конец арки v_i совпадает с началом связки r_{i+2}.

Доказательство.

1) По определению арки она не имеет общих рёбер с путём p и, следовательно, с его отрезками — связками.

2) Случай $i < k$. По определению цепи арок все арки цепи, кроме последней арки v_k, являются максимальными арками. По лемме 1 максимальная $x_i y_i$-арка v_i, $i < k$, имеет общие вершины с путём p только на отрезке $p(x_i, y_i)$. По определению связок, лемме 2 и условию $a \leq_p b$ на отрезке $p(x_i, y_i)$ есть только следующие вершины связок: A) конец связки r_i, B) вершины связки r_{i+1}, C) начало связки r_{i+2}. Случаи A и C являются исключениями, предусмотренными утверждением леммы, когда A) конец x_i связки r_i совпадает с началом арки v_i, C) конец y_i арки v_i совпадает с началом связки r_{i+2}. В случае B числа i и $i + 1$ имеют разную чётность.

Случай $i = k$. По лемме 1 максимальная xy-арка v имеет общие вершины с путём p только на отрезке $p(x, y)$. Последняя арка v_k является префиксом максимальной арки, поэтому она тоже имеет общие вершины с путём p только на отрезке $p(x_k, y_k)$. По определению связок, лемме 2 и условию $a \leq_p b$ на отрезке $p(x_k, y_k)$ есть только следующие вершины связок: A) конец связки r_k, B) вершины связки r_{k+1}, C) начало связки r_{k+2} как прямого отрезка пути p при условии $y_k \leq b$, D) все вершины связки r_{k+2} как обратного отрезка пути p при условии $y_k >_p b$. Случаи A и C являются исключениями, предусмотренными утверждением леммы, когда A) конец x_k связки r_k совпадает с началом арки v_k, C) конец y_k арки v_k

совпадает с началом связки r_{k+2}. В случае B числа k и $k+1$ имеют разную чётность. В случае D связка r_{k+2} вложена в отрезок $p(a, y_k)$, поскольку $a \leq_p b$. По определению цепи арок последняя арка v_k имеет с отрезком $p(a, y_k)$ одну общую вершину y_k, а это является исключением, предусмотренным утверждением леммы, когда конец арки v_k совпадает с началом связки r_{k+2}.

□

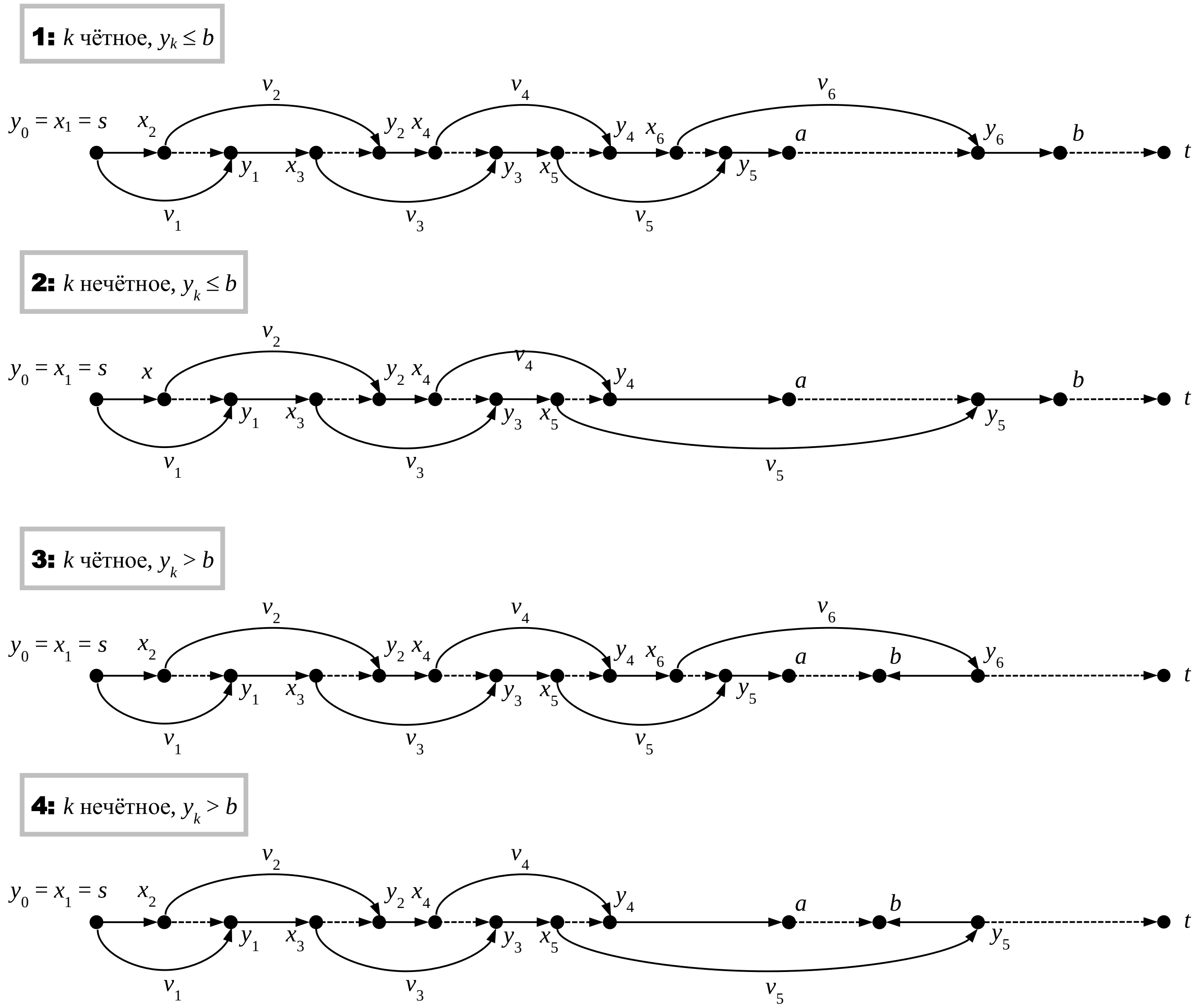


Рис. 8. Цепь арок и связки. Два рёберно непересекающихся вершинно-простых пути: sa-путь и sb-путь, пунктиром показаны отрезки пути p, не входящие в эти пути.

Лемма 6. Пусть для вершинно-простого st-пути p и его вершины $a \neq s$ существует цепь арок $v_1, \ldots, v_k$, $k \geq 1$, вершина b лежит на пути p и $a \leq_p b \leq_p t$. Пусть путь $q^{\wedge} = v_1 \cdot r_3 \cdot v_3 \cdot r_5 \cdot v_5 \cdot r_7 \cdot \ldots$ состоит из $x_i y_i$-арок v_i, где i нечётное и $1 \leq i \leq k$, и $y_{i-2} x_i$-связок r_i, где i нечётное и $3 \leq i \leq k+2$, а путь $p^{\wedge} = r_2 \cdot v_2 \cdot r_4 \cdot v_4 \cdot r_6 \cdot v_6 \cdot \ldots$ состоит из $y_{i-2} x_i$-связок, где i чётное и $2 \leq i \leq k+2$, и $x_i y_i$-арок v_i, где i чётное и $2 \leq i \leq k$. Тогда эти пути 1) вершинно-простые, 2) начинаются в вершине s; один из них заканчивается в вершине a, а другой в вершине b, и 3) эти пути не пересекаются по рёбрам.

В частности, в случае $k = 1$ имеет место: $q^{\wedge} = v_1 \cdot r_3 = v_1 \cdot p(y_1, x_{k+2}) = v_1 \cdot p(y_1, b)$ и $p^{\wedge} = r_2 = p(y_0, x_{k+1}) = p(s, a)$.

Доказательство.

1). Сначала покажем, что арки и связки являются вершинно-простыми путями. Арка является вершинно-простым путём по её определению. Связка является вершинно-простым путём, поскольку по её определению она является отрезком пути p, который является вершинно-простым путём по условию леммы.

Теперь покажем, что разные отрезки одного пути $q^{\wedge}$ или $p^{\wedge}$ не имеют общих вершин, за исключением вершин, по которым происходит конкатенация отрезков в этом пути, когда конец отрезка совпадает с началом следующего отрезка: A) разные арки, B) разные связка, C) арка и связка. A). По лемме 3 разные арки не имеют общих вершин. B). По лемме 4 разные связки не имеют общих вершин. C). По лемме 5 арка и связка не имеют общих вершин за исключением вершин, по которым происходит конкатенация арок и связок пути, т.е. когда конец арки совпадает с началом следующей связки в этом пути или, наоборот, конец связки совпадает с началом следующей арки в этом пути.

Тем самым, пути $q^{\wedge}$ и $p^{\wedge}$ вершинно-простые.

2). По определению оба пути $q^{\wedge}$ и $p^{\wedge}$ начинаются в вершине s; один из них заканчивается в вершине a, а другой в вершине b.

3). Покажем, что пути $q^{\wedge}$ и $p^{\wedge}$ не пересекаются по рёбрам. Для этого достаточно показать, что не имеют общих рёбер: арка и связка, две связки, две арки. Поскольку связки — это отрезки пути p, а арки не имеют с путём p общих рёбер, арки и связки не имеют общих рёбер. В силу неравенств из леммы 2 разные связки не имеют общих рёбер. Две разные арки не имеют общих вершин (и, следовательно, рёбер) по лемме 3.

□

Лемма 7. Пусть имеется вершинно-простой st-путь p и его вершина $a \neq s$. Если для каждой дуги на отрезке $p(s, a)$ существует арка, обходящая эту дугу, то существует и цепь арок (для пути p и вершины a), и эта цепь единственная с точностью до эквивалентности арок.

Доказательство.

Очевидно, что если существует арка, обходящая некоторую дугу пути p, то существует и максимальная арка, обходящая эту дугу, и такая арка единственная с точностью до эквивалентности арок.

Рассмотрим максимальную $x_1\grave{y}_1$-арку ($x_1 = s$), обходящую первую дугу пути p, т.е. дугу $sp(2)$, $x_1 = p(1) = s$, $p(2) \leq_p \grave{y}_1$. Если $a <_p \grave{y}_1$, то рассмотрим префикс v_1 этой арки до первой на пути p вершины $y_1 \geq_p a$, лежащей на этой арке. Очевидно, этот префикс является x_1y_1-аркой, обходящей первую дугу пути p, и все внутренние вершины отрезка $p(a, y_1)$ не лежат на арке v_1. В этом случае $k = 1$, и цепь арок построена.

Если $a \geq_p \grave{y}_1$, то положим $y_1 = \grave{y}_1$ и будем считать эту арку x_1y_1-аркой v_1. Продолжим построение цепи арок. Если построены арки $v_1, \ldots, v_m$, $m \geq 1$, которые удовлетворяют условиям 1-3 в определении цепи арок для $k = m + 1$, то рассмотрим максимальную $x_{m+1}\grave{y}_{m+1}$-арку, обходящую первую дугу пути p, начинающуюся в вершине y_m, т.е. дугу $y_mp(y_m, t)(2)$.

Если $a <_p \grave{y}_{m+1}$, то рассмотрим префикс v_m этой арки до первой на пути p вершины $y_{m+1} \geq_p a$, лежащей на этой арке. Очевидно, этот префикс является $x_{m+1}y_{m+1}$-аркой, обходящей первую дугу пути p, начинающуюся в вершине y_m, т.е. дугу $y_mp(y_m, t)(2)$, и все внутренние вершины отрезка $p(a, y_{m+1})$ не лежат на арке v_{m+1}. В этом случае $k = m + 1$, и цепь арок построена.

Если $a \geq_p \grave{y}_{m+1}$, то положим $y_{m+1} = \grave{y}_{m+1}$, будем считать эту арку $x_{m+1}y_{1m+1}$ аркой v_{m+1}, и продолжим построение цепи арок.

В силу неравенств из леммы 2 этот процесс построения цепи арок закончится через конечное число шагов, как только будет построена арка v_k такая, что $a \leq y_k$. Тем самым, будет построена цепь арок, которая, очевидно, единственная с точностью до эквивалентности арок.

□

4. *Вершинно-простые пути и рёберно непересекающиеся пути*

В данном разделе мы покажем, что для решения задачи построения дублирующих путей 1) можно ограничиться вершинно-простыми путями, 2) для каждого основного пути вместо нескольких дублирующих путей достаточно рассматривать один дублирующий путь, не пересекающийся по рёбрам с основным путём, в предположении, что могут выйти из строя только рёбра одного из двух путей (основного или дублирующего), в частности, если может выйти из строя только одно ребро.

Теорема 1. Для любого ab-пути u существует вершинно-простой ab-путь v, все дуги которого являются дугами пути u.

Доказательство: См. рис. 9. Пусть путь u не вершинно-простой, тогда его можно представить в виде $u = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3$, где отрезок u_2 не пуст и $u_1(|u_1|) = u_2(1) = u_2(|u_2|) = u_3(1)$. Рассмотрим путь $u_1 \cdot u_3$, который имеет строго меньшую длину, чем u. По построению путь $u_1 \cdot u_3$ является ab-путём. Множество дуг пути $u_1 \cdot u_3$, очевидно, является подмножеством множества дуг пути u. Будем продолжать эту операцию, пока не получим вершинно-простой ab-путь, все дуги которого являются дугами пути u. Заметим, что путь длины 1 (дуга) всегда вершинно-простой, поскольку нет петель, путь длины 0 (вершина) также всегда вершинно-простой.

□

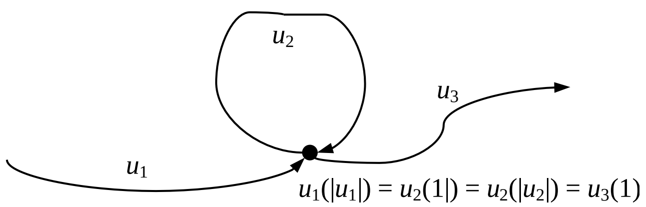


Рис. 9. Иллюстрация к доказательству теоремы 1.

Теорема 2. Пусть в графе есть вершинно-простой st-путь p и для каждой дуги cd этого пути есть дублирующий вершинно-простой st-путь, не проходящий по ребру $\{c, d\}$. Тогда в графе существуют два рёберно непересекающиеся вершинно-простых st-пути.

Доказательство.

Сначала докажем, что для каждой дуги cd пути p существует арка, обходящая эту дугу. Действительно, рассмотрим дублирующий st-путь q, не проходящий по ребру $\{c, d\}$. Отрезок $q(x, y)$, начало x и конец y которого лежат на пути p и $x \leq_p c <_p d \leq_p y$, назовём обходом. Такие обходы существуют, поскольку таким обходом является сам st-путь q для $x = s$,

$y = t$. Среди всех обходов выберем минимальный по вложенности обход $q(x, y)$. Покажем, что этот обход является аркой, обходящей дугу cd.

Действительно, поскольку путь q не проходит по ребру $\{c, d\}$, его отрезок $q(x, y)$ также не проходит по ребру $\{c, d\}$. Осталось показать, что все рёбра обхода $q(x, y)$ не лежат на пути p. Действительно, в противном случае, если бы для какой-то дуги $x'y'$ этого обхода ребро $\{x', y'\}$ лежало бы на пути p, этот обход можно было бы представить в виде $q(x, y) = q(x, x')\cdot x'y'\cdot q(y', y)$. Поскольку путь q вершинно-простой, его отрезок $q(x, y)$ также вершинно-простой. Отсюда, поскольку $x' <_q y'$, имеем $x <_q y'$ и $x' <_q y$. Поскольку обход $q(x, y)$ не проходит по ребру $\{c, d\}$, $\{x', y'\} \neq \{c, d\}$. Если $\{x', y'\} <_p \{c, d\}$, то отрезок $q(y', y)$ также является обходом: $y' \leq_p c <_p d \leq_p y$, что, учитывая $x <_q y'$, противоречит минимальности по вложенности обхода $q(x, y)$. Если $\{x', y'\} >_p \{c, d\}$, то отрезок $q(x, x')$ также является обходом: $x \leq_p c <_p d \leq_p x'$, что, учитывая $x' <_q y$, противоречит минимальности по вложенности обхода $q(x, y)$. Тем самым, обход $q(x, y)$ является аркой, обходящей дугу cd.

Тогда по лемме 7 для пути p и вершины $a = t$ существует цепь арок $v_1, \ldots, v_k$, $k \geq 1$, и эта цепь единственная с точностью до эквивалентности арок. Заметим, что, поскольку $a = t$, последняя арка v_k должна заканчиваться в вершине $y_k = a = t$. Положим $b = t$. Тогда связка r_{k+2} будет пустым путём в вершине t. По лемме 6 существуют путь $q^\wedge = v_1\cdot r_3\cdot v_3\cdot r_5\cdot v_5\cdot r_7\cdot\ldots$, состоящий из x_iy_i-арок v_i, где i нечётное и $1 \leq i \leq k$, и $y_{i-2}x_i$-связок r_i, где i нечётное и $3 \leq i \leq k + 2$, и путь $p^\wedge = r_2\cdot v_2\cdot r_4\cdot v_4\cdot r_6\cdot v_6\cdot\ldots$, состоящий из $y_{i-2}x_i$-связок, где i чётное и $2 \leq i \leq k + 2$, и x_iy_i-арок v_i, где i чётное и $2 \leq i \leq k$. Эти пути вершинно-простые, начинаются в вершине s; один из них заканчивается в вершине $a = t$, а другой в вершине $b = t$, и эти пути не пересекаются по рёбрам. Тем самым, существуют два рёберно непересекающиеся вершинно-простые st-пути $q^\wedge$ и $p^\wedge$.

□

Эта теорема показывает, что при наличии дублирующих st-путей, суммарно обходящих все рёбра основного st-пути, в графе существуют два рёберно непересекающиеся st-пути. Можно заметить, что в общем случае не существует $m > 2$ путей с общим началом и общим концом, которые попарно рёберно не пересекаются. Это показывает пример на рис. 10.

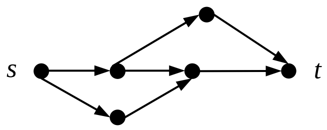


Рис. 10. Пример графа, в котором нет трёх и более попарно рёберно непересекающихся st-путей.

5. Основной раздел: Теорема о четырёх путях

Теорема 3. Пусть в графе есть три попарно разные хосты s, t, t', два рёберно непересекающихся st-пути и два рёберно непересекающихся st'-пути. Тогда эти пути можно выбрать вершинно-простыми и такими, что в замыкании по дугам множества этих путей все пути также вершинно-простые.

<u>Доказательство теоремы 3</u>. По теореме 1 операция удаления циклов не меняет начала и концы путей, а множество дуг пути отображает в его подмножество. Поэтому, если пути не имели общих рёбер, то после удаления циклов они также не будут иметь общих рёбер. Тем самым, для доказательства теоремы 3 мы можем считать, что заданные условием теоремы четыре пути вершинно-простые. Обозначим два вершинно-простых рёберно непересекающихся st-пути через p и q.

Пусть есть два вершинно-простых st'-пути p' и q', не имеющие общих рёбер. По условию теоремы 3 (и теоремы 1) такие два пути существуют. Поскольку вершина s лежит на путях p и q, а вершина t' не лежит на пути p и пути q, у путей p' и q' есть постфиксы, начинающийся в вершине на пути p или q, все остальные вершины которых не лежат на пути p и пути q. Начало такого постфикса пути p' обозначим $f(p')$, а начало такого постфикса пути q' обозначим $f(q')$. Поскольку у постфиксов $p'(f(p'), t')$ и $q'(f(q'), t')$ только начальные вершины лежат на путях p и q, эти постфиксы не имеют общих рёбер с путями p и q. Поскольку пути p' и q' не имеют общих рёбер, их постфиксы $p'(f(p'), t')$ и $q'(f(q'), t')$ также не имеют общих рёбер.

СЛУЧАЙ 1. Пусть есть пара вершинно-простых рёберно непересекающихся st'-путей p' и q' такая, что одна из вершин $f(p')$ или $f(q')$ лежит на пути p, а другая вершина лежит на пути q. В частности, допустимо $f(p') = s$ и/или $f(q') = s$.

С точностью до обозначений p' и q' можно считать, что вершина $f(p')$ лежит на пути p, а вершина $f(q')$ лежит на пути q (см. рис. 11). Рассмотрим пути $p^* = p(s, f(p'))\cdot p'(f(p'), t')$ и $q^* = q(s, f(q'))\cdot q'(f(q'), t')$, и множество путей $R = \{p, q, p^*, q^*\}$. Поскольку пути p, p', q, q' вершинно-простые, их отрезки $p(s, f(p'))$, $p'(f(p'), t')$, $q(s, f(q'))$, $q'(f(q'), t')$ также вершинно-простые. Поскольку постфикс $p'(f(p'), t')$ не имеет общих вершин с путём p и, следовательно, с его префиксом $p(s, f(p'))$, кроме вершины $f(p')$, путь p^* вершинно-простой. Аналогично поскольку постфикс $q'(f(q'), t')$ не имеет общих вершин с путём q и, следовательно, с его префиксом $q(s, f(q'))$, кроме вершины $f(q')$, путь q^* вершинно-простой. Поскольку пути p и q не пересекаются по рёбрам, их префиксы $p(s, f(p'))$ и $q(s, f(q'))$ тоже не пересекаются по рёбрам. Поскольку пути p' и q' не пересекаются по рёбрам, их постфиксы $p'(f(p'), t')$ и $q'(f(q'), t')$ тоже не пересекаются по рёбрам. Поскольку постфиксы $p'(f(p'), t')$ и $q'(f(q'), t')$ не имеют общих рёбер с путями p и q, эти постфиксы не имеют общих рёбер с префиксами $p(s, f(p'))$ и $q(s, f(q'))$. Тем самым, пути p^* и q^* не пересекаются по рёбрам.

Путь q не имеет общих рёбер с постфиксом $p'(f(p'), t')$ и с путём p и, следовательно, с его префиксом $p(s, f(p'))$. Поэтому пути q и p^* не пересекаются по рёбрам. Аналогично путь p не имеет общих рёбер с постфиксом $q'(f(q'), t')$ и с путём q и, следовательно, с его префиксом $q(s, f(q'))$. Поэтому пути p и q^* не пересекаются по рёбрам. В итоге общие дуги могут быть только в парах путей $\{p, p^*\}$ и $\{q, q^*\}$, причём общие дуги путей одной пары лежат только на их общем префиксе $p(s, f(p'))$ или $q(s, f(q'))$, соответственно. Поэтому замыкание по дугам такой пары путей не порождает новых путей. Тем самым, конечное множество путей R замкнуто по дугам и состоит из двух вершинно-простых рёберно непересекающихся

st-путей p, q и двух вершинно-простых рёберно непересекающихся $st`$-путей p^*, q^*. Таким образом, для СЛУЧАЯ 1 и множества путей R теорема 3 доказана.

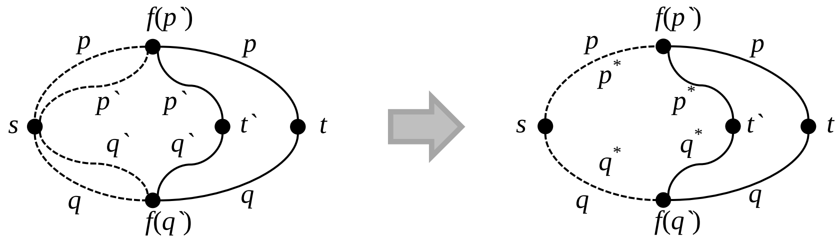


Рис. 11. СЛУЧАЙ 1. Пунктиром выделены отрезки, которые могут быть пустыми.

СЛУЧАЙ 2. Теперь пусть для любой пары вершинно-простых рёберно непересекающихся $st`$-путей $p`$ и $q`$ вершины $f(p`)$ и $f(q`)$ лежат только на одном из путей p или q.

С точностью до обозначений p и q можно считать, что вершины $f(p`)$ и $f(q`)$ лежат на пути p. С точностью до обозначений $p`$ и $q`$ можно считать, что $f(p`) \leq_p f(q`)$. См. рис. 12.

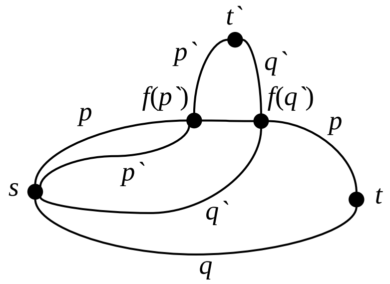


Рис. 12. СЛУЧАЙ 2.

Финальной парой путей будем называть пару вершинно-простых рёберно непересекающихся путей w_a и w_b, где w_a это $at`$-путь, $w_b$ это $bt`$-путь, вершины a и b лежат на пути p, $a \leq_p b < t$, и все внутренние вершины этих путей не лежат на путях p и q. Финальные пары путей существуют, поскольку такой парой является пара постфиксов $p`(f(p`), t`)$ и $q`(f(q`), t`)$ для $a = f(p`)$ и $b = f(q`)$. Выберем среди всех финальных пар путей любую такую пару w_a и w_b, для которой вершина a ближе всего к вершине s на пути p (минимальна по отношению «$<_p$»). Будем называть её *минимальной* финальной парой, а пути w_a и w_b будем называть *финалями*. До конца этого раздела фиксируем пути p, q, $p`$, $q`$ и выбранную пару финалей w_a и w_b и, соответственно, вершины s, t, $t`$, a и b. См. рис. 13.

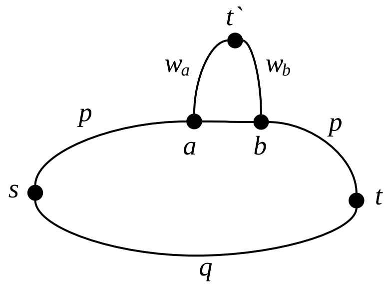


Рис. 13. Финали w_a и w_b.

Ни одна из вершин a и b не совпадает с вершиной s, которая лежит на обоих путях p и q. Пусть это не так. Тогда $s = a \leq_p b$. Рассмотрим пути w_a и $p(s, b)\cdot w_b$. Пути w_a и w_b вершинно-простые по их определению. Путь $p(s, b)$ вершинно-простой как префикс вершинно-простого пути p. Пути $p(s, b)$ и w_b имеют только одну общую вершину b, так как все вершины пути $p(s, b)$ лежат на пути p, а все вершины пути w_b, кроме вершины b, не лежат на пути p. Следовательно, пути w_a и $p(s, b)\cdot w_b$ вершинно-простые. Путь w_a по его определению рёберно не пересекается с путём p и, следовательно, с его префиксом $p(s, b)$. Также путь w_a рёберно не пересекается с путём w_b по определению этих путей. Тем самым, пути w_a и $p(s, b)\cdot w_b$ рёберно не пересекаются. По определению путей w_a и $p(s, b)$ оба они начинаются в вершине s, по определению путей w_a и w_b оба они заканчиваются в вершине $t`$. Тем самым, пути $w_a$ и $p(s, b)\cdot w_b$ вершинно-простые рёберно непересекающиеся $st`$-пути. Поскольку $a = s$ имеем $f(w_a) = s$. Очевидно $f(p(s, b)\cdot w_b) = b$. Однако вершина s лежит на пути q (вершина s общая вершина путей p и q), а вершина b лежит на пути p, что противоречит условию рассматриваемого СЛУЧАЯ 2.

Докажем несколько лемм.

Лемма 8. Каждая дуга на префиксе $p(s, a)$ обходится аркой.

Доказательство: Пусть cd дуга на префиксе $p(s, a)$, тогда $d \leq_p a$. Пути $p`$ и $q`$ не имеют общих рёбер, поэтому хотя бы один из этих путей не проходит по дуге cd.

Сначала рассмотрим случай, когда путь $p`$ не проходит по дуге $cd$. Будем двигаться по пути $p`$ от вершины s до первой вершины $p`(i)$, которая лежит на отрезке $p(d, a)$. Такая вершина есть, поскольку путь $p`$ проходит через вершину a, для которой верно $d \leq_p a \leq_p a$. От вершины $p`(i)$ будем двигаться по пути $p`$ в обратном направлении до первой встреченной другой вершины $p`(j)$ на пути $p$, где $j < i$. Такая вершина есть, поскольку путь начинается в вершине $s <_p a$, лежащей на пути $p$. Поскольку вершина $p`(i)$ первая встреченная на пути $p(d, a)$ и $p`(j) \neq p`(i)$, вершина $p`(j) <_p d$, следовательно, $p`(j) \leq_p c$. Единственное ребро пути p, которое могло бы лежать на отрезке $p`[j, i]$, это ребро $\{c, d\}$ в случае, если $j = i - 1$, $p`(j) = c$, $p`(i) = d$, но тогда путь $p`$ проходил бы по дуге cd, что не верно. Следовательно, на отрезке $p`[j, i]$ нет рёбер пути $p$. Отрезок $p`[j, i]$ вершинно-простой путь как отрезок вершинно-простого пути $p`$, все рёбра которого не лежат на пути $p$, начало $p`(j)$ и конец $p`(i)$ лежат на пути $p$, и, поскольку петель нет, $c <_p d$, а тогда $p`(j) \leq_p c <_p d \leq_p p`(i)$. Тем самым путь $p`[j, i]$ является $p`(j)p`(i)$-аркой, обходящей дугу cd.

Теперь рассмотрим случай, когда путь $q`$ не проходит по дуге $cd$. Доказательство аналогично предыдущему. Будем двигаться по пути $q`$ от вершины s до первой вершины $p`(i)$, которая лежит на отрезке $p(d, b)$. Такая вершина есть, поскольку путь $q`$ проходит через вершину b, для которой верно $d \leq_p b \leq_p b$. От вершины $q`(i)$ будем двигаться по пути $q`$ в обратном направлении до первой встреченной другой вершины $q`(j)$ на пути $p$, $j < i$. Такая вершина есть, поскольку путь начинается в вершине $s <_p a <_p b$, лежащей на пути $p$. Поскольку вершина $q`(i)$ первая встреченная на пути $p(d, a)$ и $q`(j) \neq q`(i)$, вершина $q`(j) <_p d$, следовательно, $q`(j) \leq_p c$. Единственное ребро пути p, которое могло бы лежать на отрезке $q`[j, i]$, это ребро $\{c, d\}$ в случае, если $j = i - 1$, $q`(j) = c$, $q`(i) = d$, но тогда путь $q`$ проходил бы по дуге cd, что не верно. Следовательно, на отрезке $q`[j, i]$ нет рёбер пути $p$. Отрезок $q`[j, i]$ вершинно-простой путь как отрезок вершинно-простого пути $q`$, все рёбра которого не лежат на пути $p$, начало $q`(j)$ и конец $q`(i)$ лежат на пути $p$, и, поскольку петель нет, $c <_p d$, а тогда $q`(j) \leq_p c <_p d \leq_p q`(i)$. Тем самым путь $q`[j, i]$ является $q`(j)q`(i)$-аркой, обходящей дугу cd.

□

Лемма 9. 1) Пусть xy-арка v является максимальной аркой, обходящей некоторую дугу cd на префиксе $p(s, a)$. Если какая-то внутренняя вершина арки v лежит на пути q, то эта арка обходит первую дугу пути p, т.е. дугу $sp(2)$, $x = p(1) = s$, $y = p(2)$. 2) Среди всех максимальных sy-арок, обходящих первую дугу пути p, существует и единственная с точностью до эквивалентности арок sy-арка v_1 такая, что все общие рёбра путей v_1 и q лежат на их общем префиксе.

Доказательство. См. рис. 14.

1) Пусть арка v имеет внутреннюю вершину, лежащую на пути q. Пусть z максимальная по отношению «$\leq_v$» вершина на пути v, лежащая на пути q. Рассмотрим путь $v_1 = q(s, z)\cdot v(z, y)$ и покажем, что он является 1.1) аркой, 1.2) эта арка эквивалентна арке v, т.е. тоже максимальная и обходит дугу cd, 1.3) эта арка обходит первую дугу пути p, 1.4) эта арка имеет с путём q общие вершины только на их общем префиксе.

1.1) Пути p и q не пересекаются по рёбрам, следовательно, путь p и префикс $q(s, z)$ не пересекаются по рёбрам. Арка v и путь p не пересекаются по рёбрам, следовательно, постфикс $v(z, y)$ и путь p не пересекаются по рёбрам. А тогда путь v_1 и путь p не пересекаются по рёбрам. Путь v_1 начинается в вершине s и заканчивается в вершине y, обе эти вершины лежат на пути p, и, поскольку $s \leq_p x$ и $x <_p y$, имеем $s <_p y$. Поэтому путь v_1 является аркой, очевидно, обходящей все дуги пути p на префиксе $p(s, y)$.

1.2) Поскольку дуга cd обходится аркой v, она лежит на отрезке $p(x, y)$ и, поскольку $s \leq_p x$, также лежит на отрезке $p(s, y)$. Поэтому арка v_1 обходит дугу cd. Поскольку xy-арка v является максимальной аркой, обходящей дугу cd, и имеет тот же конец y, что арка v_1, должно быть $x \leq_p s$, что влечёт $x = s$. Тем самым, арки v и v_1 имеют общее начало $x = s$ и общий конец y, поэтому арка v_1 эквивалентна арке v, т.е. тоже максимальная арка.

1.3) Поскольку $s <_p y$, первая дуга пути p лежит на отрезке $p(s, y)$. Поэтому арка v_1 обходит первую дугу пути p.

1.4) Поскольку вершина z максимальная по отношению «$\leq_v$» вершина на пути v, лежащая на пути q, постфикс $v(z, y)$ не имеет общих вершин с путём q, кроме вершины z. Поэтому арка v_1 и путь q имеют общие вершины только на их общем префиксе $q(s, z)$.

2) Утверждение 2 непосредственно следует из того, что арка v_1 является максимальной аркой, обходящей первую дугу пути p, и имеют с путём q общие вершины только на их общем префиксе. Поскольку арка v_1 максимальная и обходит первую дугу пути p, она единственная с точностью до эквивалентности арок среди всех арок, обходящих первую дугу пути p.

□

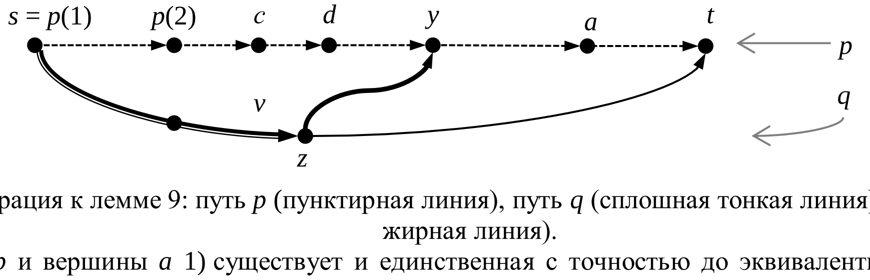


Рис. 14. Иллюстрация к лемме 9: путь p (пунктирная линия), путь q (сплошная тонкая линия), арка v (сплошная жирная линия).

Лемма 10. Для пути p и вершины a 1) существует и единственная с точностью до эквивалентности арок цепь арок $v_1, \ldots, v_k$, $k \geq 1$ такая, что 2) общие рёбра арки v_1 и пути q лежат на их общем префиксе; 3) другие арки не имеют общих вершин с путём q; 4) верны неравенства $(x_1 = s) <_p x_2 <_p y_1 <_p x_3 <_p y_2 <_p \ldots <_p y_{i-2} <_p x_i <_p y_{i-1} <_p \ldots <_p x_k <_p y_{k-1} <_p a \leq_p y_k$; 5) если, как в разделе 3, обозначить $y_0 = s$, $x_{k+1} = a$, $x_{k+2} = b$, то имеются вершинно-простой путь $q^{\wedge} = v_1\cdot r_3\cdot v_3\cdot r_5\cdot v_5\cdot r_7\cdot\ldots$, состоящий из x_iy_i-арок v_i, где i нечётное и $1 \leq i \leq k$, и $y_{i-2}x_i$-связок r_i, где i нечётное и $3 \leq i \leq k + 2$, и вершинно-простой путь $p^{\wedge} = r_2\cdot v_2\cdot r_4\cdot v_4\cdot r_6\cdot v_6\cdot\ldots$, состоящий из $y_{i-2}x_i$-связок, где i чётное и $2 \leq i \leq k + 2$, и x_iy_i-арок v_i, где i чётное и $2 \leq i \leq k$; эти пути начинаются в вершине s; один из них заканчивается в вершине a, а другой в вершине b, и эти пути не пересекаются по рёбрам.

Доказательство. См. рис. 15.

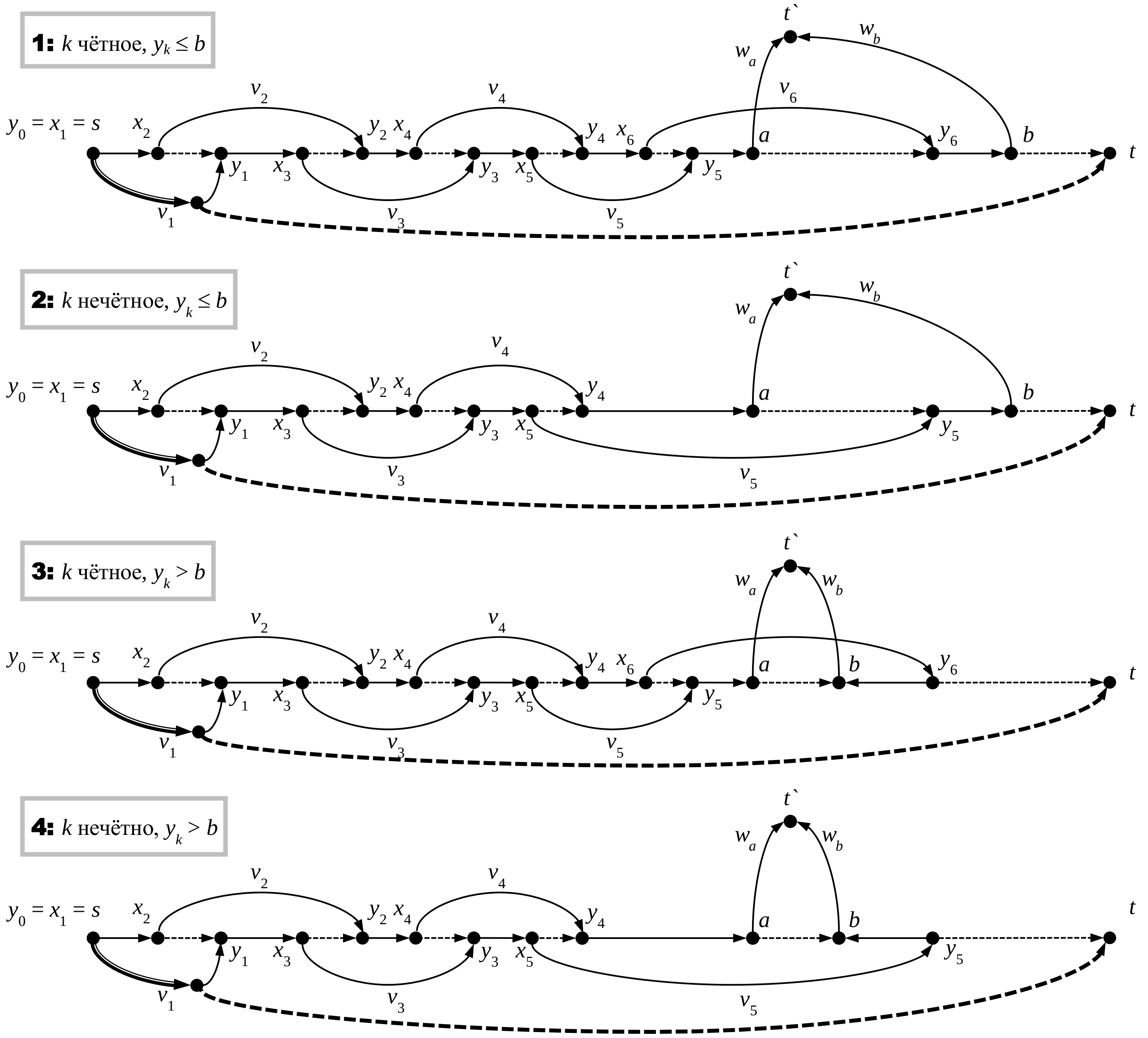


Рис. 15. 4 варианта цепи арок. st-путь p показан тонкой горизонтальной линией, st-путь q показан жирной линией, пунктиром показаны отрезки st-пути p и q, которые не входят в st`-пути p^* и q^*. Если k чётное, то $q^* = q^{\wedge}{\cdot}w_a$ и $p^* = p^{\wedge}{\cdot}w_b$; если k нечётное, то $q^* = q^{\wedge}{\cdot}w_b$ и $p^* = p^{\wedge}{\cdot}w_a$.

По лемме 8 каждая дуга на префиксе $p(s, a)$ обходится аркой. Следовательно, по лемме 7 верно утверждение 1. Если $k > 1$, то по определению цепи арок арка v_1 максимальна, и по лемме 9, утверждение 2, арку v_1 можно выбрать такой, чтобы все общие рёбра арки v_1 и пути q лежали на их общем префиксе, т.е. было верно утверждение 2. Если $k = 1$, то по определению цепи арок арка v_1 является префиксом максимальной арки, обходящей первую дугу пути p. По лемме 9, утверждение 2, эту максимальную арку можно выбрать такой, чтобы все общие рёбра максимальной арки и пути q лежали на их общем префиксе. А тогда все общие рёбра арки v_1 (как префикса максимальной арки) и пути q будут лежать на их общем префиксе, т.е. верно утверждение 2. По лемме 9, утверждение 1, верно утверждение 3. По лемме 2 верно утверждение 4. По лемме 6 верно утверждение 5.

□

Лемма 11. Для цепи арок $v_1, \ldots, v_k$, удовлетворяющей условиям леммы 10, каждая арка v_i, $i = 1..k$, не имеет общих вершин с финалью w_a, за исключением допустимого случая $i = k$, $y_k = a$, и с финалью w_b, за исключением допустимого случая $i = k$, $y_k = b$.

Доказательство: Допустим противное: пусть некоторая арка v_i, $i = 1..k$, имеет общую вершину с финалью w_a или w_b, и это не является допустимым случаем. Будем двигаться по пути v_i до первой встреченной вершины z, лежащей на финали w_a или w_b, а затем в обратном направлении до первой встреченной вершины x на пути p. Такая вершина x существует, поскольку путь v_i начинается в вершине x_i, лежащей на пути p. Мы рассмотрим все возможные случаи, которые будут иллюстрироваться на рис. 16÷21. На этих рисунках показаны пути: жирной линией — префикс $v_i(x_i, z)$ арки v_i, двойной пунктирной линией — финали w_a и w_b, пунктиром — путь p, сплошной одинарной линией — путь q.

Рассмотрим два случая 1 и 2 в зависимости от того, на какой из двух финалей лежит вершина z.

1. Вершина z лежит на пути w_a.

Покажем, что $z \neq a$. Допустим противное $z = a$. Если $i < k$, то по определению цепи арок арка v_i максимальная и $y_i <_p a$. По лемме 1 все общие вершины арки v_i и пути p, в том числе вершина $z = a$, лежат на отрезке $p(x_i, y_i)$. По лемме 2 имеет место $z = a \leq_p y_i <_p a$, следовательно, $a <_p a$, чего быть не может. Если $i = k$, то по определению цепи арок арка v_k является префиксом максимальной арки и имеет с отрезком $p(a, y_k)$ одну общую вершину y_k. Поэтому либо $z <_p a$, либо $z = a = y_k$, но последний случай допустим.

Покажем, что $x <_p a$. Допустим противное $x \geq_p a$. Если $i < k$, то по определению цепи арок арка v_i максимальная и $y_i <_p a$. По лемме 1 все общие вершины арки v_i и пути p, в том числе вершина x, лежат на отрезке $p(x_i, y_i)$. По лемме 2 $x \leq_p y_i <_p a$, что влечёт $x <_p a$, что противоречит допущению. Если $i = k$, то по определению цепи арок арка v_k является префиксом максимальной арки и имеет с отрезком $p(a, y_k)$ одну общую вершину y_k. Поэтому, либо $x <_p a$, что противоречит допущению, либо $x = y_k$. В последнем случае, поскольку вершина x расположена на пути v_k не дальше вершины z, а вершина y_k конец пути v_k, имеем $x = z = y_k$. Поэтому вершина z лежит на пути p, но по определению финаль w_a имеет с путём p только одну общую вершину a. Следовательно, $z = a$, что влечёт $y_k = a$, а этот случай допустим.

Рассмотрим xt`-путь $w = v_i(x, z)\cdot w_a(z, t`)$. Возможны два случая 1.1 и 1.2 в зависимости от того, лежит ли некоторая внутренняя вершина пути w на пути q.

1.1. Внутренние вершины пути w не лежат на пути q. См. рис. 16.

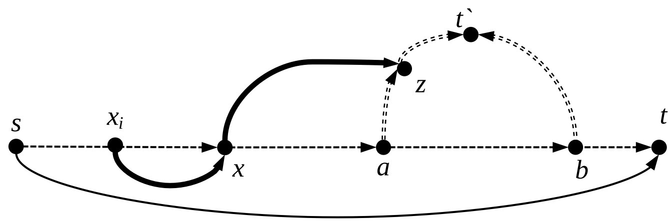


Рис. 16. Иллюстрация к доказательству леммы 11, п. 1.1: Вершина z лежит на пути w_a.
Внутренние вершины пути $w = v_i(x, z)\cdot w_a(z, t`)$ не лежат на пути q.

Покажем, что xt`-путь $w$ образует с $bt$`-путём w_b финальную пару путей. Для этого нужно показать, что A) путь w начинается в вершине, лежащей на пути p и заканчивается в вершине t`, B) путь w вершинно-простой, C) внутренние вершины пути w не лежат на пути p (на пути q они не лежат по условию рассматриваемого случая 1.1), D) пути w и w_b рёберно не пересекаются.

A) Путь w — это xt`-путь, т.е. начинается в вершине $x$, лежащей на пути $p$, и заканчивается в вершине $t$`.

B) Отрезок $v_i(x, z)$ вершинно-простой как отрезок арки, которая вершинно-простая по определению арки. Отрезок $w_a(z, t`)$ вершинно-простой как отрезок финали, которая вершинно-простая по определению финали. Вершина z является первой вершиной пути w_a, встреченной на пути v_i. Поэтому путь w вершинно-простой.

C) Отрезок $v_i(x, z)$ имеет с путём p только одну общую вершину x, поскольку, во-первых, вершина z лежит на финали w_a, у финали w_a только вершина a лежит на пути p, но $z \neq a$, и, во-вторых, все внутренние вершины отрезка $v_i(x, z)$ не лежат на пути p, поскольку вершина x первая встреченная вершина на пути p при обратном движении по пути v_i от вершины z. Отрезок $w_a(z, t`)$ не имеет общих вершин с путём p, поскольку финаль w_a имеет только одну общую вершину с путём p, а именно вершину a, но $z \neq a$. Тем самым внутренние вершины пути w не лежат на пути p.

D) Поскольку вершина z является первой встреченной на пути v_i вершиной, лежащей на финали w_a или w_b, на отрезке $v_i(x, z)$ нет двух вершин, лежащих на пути w_b, следовательно, отрезок $v_i(x, z)$ не имеет общих рёбер с финалью w_b. Поскольку финали w_a и w_b по их определению не имеют общих рёбер, постфикс $w_a(z, t`)$ также не имеет общих рёбер с финалью w_b. Тем самым, пути w и w_b рёберно не пересекаются.

Итак, xt`-путь $w$ и $bt$`-путь w_b образуют финальную пару путей. Однако $x <_p a$, что противоречит минимальности финальной пары w_a, w_b. В случае 1.1. мы пришли к противоречию, следовательно, такого случая не бывает.

1.2. Некоторые внутренние вершины пути w лежат на пути q.

По определению финаль w_a не имеет внутренних вершин, лежащих на пути q. Вершина $z \neq a$ является внутренней вершиной финали w_a, вершина t` не лежит на пути $q$. Поэтому отрезок $w_a(z, t`)$ не имеет общих вершин с путём q. Следовательно, каждая внутренняя вершина пути w, лежащая на пути q, лежит на отрезке $v_i(x, z)$ и отлична от z. По лемме 10 арка v_i является первой аркой v_1, т.е. $i = 1$, $x_i = s$. Рассмотрим два st`-пути: $q`` = v_1(s, z)\cdot w_a(z, t`)$ и $p`` = p(s, b)\cdot w_b$.

Покажем, что эти пути рёберно не пересекаются. Арка v_1 и путь p не имеют общих рёбер, поэтому их отрезки $v_1(s, z)$ и $p(s, b)$ также не имеют общих рёбер. Вершина z первая на пути v_1, которая лежит на финали w_a или w_b, поэтому отрезок $v_1(s, z)$ не имеет общих рёбер с финалью w_b. По определению финаль w_a не имеет общих рёбер с путём p, следовательно, их отрезки $w_a(z, t`)$ и $p(s, b)$ также не имеют общих рёбер. Финали $w_a$ и $w_b$ не имеют общих рёбер по определению финальной пары путей, следовательно, отрезок $w_a(z, t`)$ и финаль w_b также не имеют общих рёбер. Тем самым, пути: $q``$ и $p``$ не имеют общих рёбер.

Два пути $q``$ и $p``$ являются st`-путями. Вершина $x$ последняя вершина на отрезке $v_1(s, z)$, лежащая на пути $p$. По определению финаль $w_a$ имеет с путём $p$ только одну общую вершину $a$. Поскольку $z \neq a$, на отрезке $w_a(z, t`)$ нет вершин пути p. Тем самым, вершина x последняя на пути $q``$ вершина, лежащая на пути p. Рассмотрим два случая 1.2.1 и 1.2.2 в зависимости от того, есть ли на отрезке $v_1(x, z)$ вершины пути q.

1.2.1. На отрезке $v_1(x, z)$ нет вершин пути q. См. рис. 17. Тогда $f(q``) = x$. Но $x <_p a$, что противоречит минимальности финальной пары w_a и w_b.

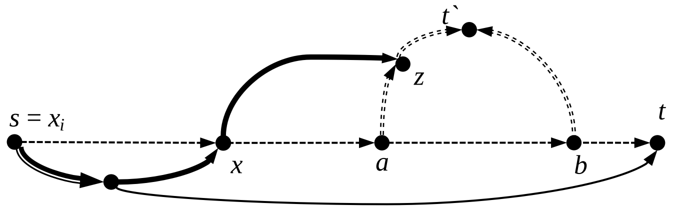


Рис. 17. Иллюстрация к доказательству леммы 11, п. 1.2.1: Вершина z лежит на пути w_a.

Некоторые внутренние вершины пути $w = v_i(x, z)\cdot w_a(z, t`)$, $i = 1$, лежат на пути q, но не на отрезке $v_1(x, z)$.

1.2.2. На отрезке $v_1(x, z)$ есть вершины пути q. См. рис. 18. Тогда для последней на пути $q``$ такой вершины $u$ имеет место $f(q``) = u$. А это значит, что $f(q``)$ лежит на пути $q$, а $f(p``) = b$ лежит на пути p, что противоречит рассматриваемому СЛУЧАЮ 2 в доказательстве теоремы 3.

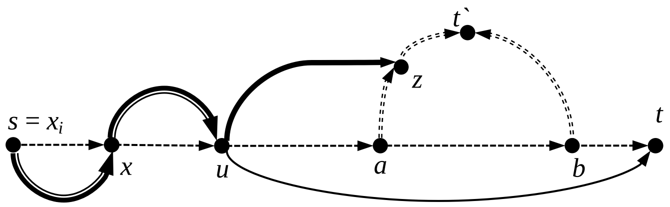


Рис. 18. Иллюстрация к доказательству леммы 11, п. 1.2.2: Вершина z лежит на пути w_a.

Некоторые внутренние вершины пути $w = v_i(x, z)\cdot w_a(z, t`)$, $i = 1$, лежат на пути q и на отрезке $v_1(x, z)$.

Поскольку в обоих случаях 1.2.1 и 1.2.2 мы пришли к противоречию, тем самым, мы пришли к противоречию в случае 1.2. Поскольку в обоих случаях 1.1 и 1.2 мы пришли к противоречию, тем самым, мы пришли к противоречию в случае 1.

2. Вершина z не лежит на пути w_a.

Тогда вершина z лежит на пути w_b.

Покажем, что $z \neq b$. Допустим противное $z = b$. Если $i < k$, то по определению цепи арок арка v_i максимальная и $y_i <_p a \leq_p b$. По лемме 1 все общие вершины арки v_i и пути p, в том числе вершина $z = b$, лежат на отрезке $p(x_i, y_i)$. По лемме 2 $z = b \leq_p y_i <_p a$, следовательно, $b <_p a$, что противоречит определению финальной пары путей. Если $i = k$, то по определению цепи арок арка v_k является префиксом максимальной арки и имеет с отрезком $p(a, y_k)$ одну общую вершину y_k. Поэтому либо $z = b <_p a$, что противоречит определению финальной пары путей, либо $z = b = y_k$, но последний случай допустим.

Покажем, что $x <_p a$. Допустим противное $x \geq_p a$. Если $i < k$, то по определению цепи арок арка v_i максимальная и $y_i <_p a$. По лемме 1 все общие вершины арки v_i и пути p, в том числе вершина x, лежат на отрезке $p(x_i, y_i)$. По лемме 2 $x \leq_p y_i <_p a$, что влечёт $x <_p a$, что противоречит допущению. Если $i = k$, то по определению цепи арок арка v_k является префиксом максимальной арки и имеет с отрезком $p(a, y_k)$ одну общую вершину y_k. Поэтому, либо $x <_p a$, что противоречит допущению, либо $x = y_k$. В последнем случае, поскольку вершина x расположена на пути v_k не дальше вершины z, а вершина y_k конец пути v_k, имеем $x = z = y_k$. Поэтому вершина z лежит на пути p, но по определению финаль w_b имеет с путём p только одну общую вершину b. Следовательно, $z = b$, что влечёт $y_k = b$, а этот случай допустим.

Рассмотрим путь $w = v_i(x, z)\cdot w_b(z, t`)$. Возможны два случая 2.1 и 2.2 в зависимости от того, лежит ли некоторая внутренняя вершина пути w на пути q.

2.1. Внутренние вершины пути w не лежат на пути q. См. рис. 19.

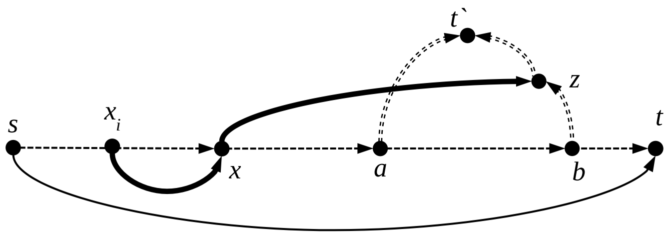


Рис. 19. Иллюстрация к доказательству леммы 11, п. 2.1: Вершина z не лежит на пути w_a.

Внутренние вершины пути $w = v_i(x, z)\cdot w_a(z, t`)$, не лежат на пути q.

Покажем, что $xt`$-путь $w$ образует с $at`$-путём w_a финальную пару путей. Для этого нужно показать, что A) путь w начинается в вершине, лежащей на пути p и заканчивается в вершине $t`$, B) путь w вершинно-простой, C) внутренние вершины пути w не лежат на пути p (на пути q они не лежат по условию рассматриваемого случая 2.1), D) пути w и w_a рёберно не пересекаются.

A) Путь w — это $xt`$-путь, т.е. начинается в вершине $x$, лежащей на пути $p$, и заканчивается в вершине $t`$.

B) Отрезок $v_i(x, z)$ вершинно-простой как отрезок арки, которая является вершинно-простой по определению арки. Отрезок $w_b(z, t`)$ вершинно-простой как отрезок финали, которая является вершинно-простой по определению финали. Вершина z первая встреченная на пути v_i вершина, лежащая на пути w_b. Поэтому путь w вершинно-простой.

C) Отрезок $v_i(x, z)$ имеет с путём p только одну общую вершину x, поскольку, во-первых, вершина z лежит на финали w_b, у финали w_b только вершина b лежит на пути p, но $z \neq b$, и, во-вторых, все внутренние вершины отрезка $v_i(x, z)$ не лежат на пути p, поскольку вершина x первая встреченная вершина на пути p при обратном движении по пути v_i от вершины z.

Отрезок $w_b(z, t`)$ не имеет общих вершин с путём p, поскольку финаль w_b имеет только одну общую вершину с путём p, а именно вершину b, но $z \neq b$. Тем самым внутренние вершины пути w не лежат на пути p.

D) Поскольку вершина z первая встреченная на пути v_i вершина, лежащая на финали w_a или w_b, на отрезке $v_i(x, z)$ нет двух вершин, лежащих на пути w_a, следовательно, отрезок $v_i(x, z)$ не имеет общих рёбер с финалью w_a. Поскольку финали w_a и w_b по их определению не имеют общих рёбер, постфикс $w_b(z, t`)$ также не имеет общих рёбер с финалью w_a. Тем самым, пути w и w_a рёберно не пересекаются.

Итак, $xt`$-путь $w$ и $at`$-путь w_a образуют финальную пару путей. Однако $x <_p a$, что противоречит минимальности финальной пары w_a, w_b. В случае 2.1. мы пришли к противоречию.

2.2. Некоторые внутренние вершины пути w лежат на пути q.

По определению финаль w_b не имеет внутренних вершин, лежащих на пути q. Вершина $z \neq b$ является внутренней вершиной финали w_b, вершина $t`$ не лежит на пути $q$. Поэтому отрезок $w_b(z, t`)$ не имеет общих вершин с путём q. Следовательно, каждая внутренняя вершина пути w, лежащая на пути q, лежит на отрезке $v_i(x, z)$ и отлична от z. По лемме 10 арка v_i является первой аркой v_1, т.е. $i = 1$, $x_i = s$. Рассмотрим два $st`$-пути: $q`` = v_1(s, z) \cdot w_b(z, t`)$ и $p`` = p(s, a) \cdot w_a$.

Покажем, что эти пути рёберно не пересекаются. Арка v_1 и путь p не имеют общих рёбер, поэтому их отрезки $v_1(s, z)$ и $p(s, a)$ также не имеют общих рёбер. Вершина z первая на пути v_1, которая лежит на финали w_a или w_b, поэтому отрезок $v_1(s, z)$ не имеет общих рёбер с финалью w_a. По определению финаль w_b не имеет общих рёбер с путём p, следовательно, их отрезки $w_b(z, t`)$ и $p(s, a)$ также не имеют общих рёбер. Финали $w_a$ и $w_b$ не имеют общих рёбер по определению финальной пары путей, следовательно, отрезок $w_b(z, t`)$ и финаль w_a также не имеют общих рёбер. Тем самым, пути: $q``$ и $p``$ не имеют общих рёбер.

Два пути $q``$ и $p``$ являются $st`$-путями. Вершина $x$ последняя вершина на отрезке $v_1(s, z)$, лежащая на пути $p$. По определению финаль $w_b$ имеет с путём $p$ только одну общую вершину $b$. Поскольку $z \neq b$, на отрезке $w_b(z, t`)$ нет вершин пути p. Тем самым, вершина x последняя на пути $q``$ вершина, лежащая на пути p. Рассмотрим два случая 2.2.1 и 2.2.2 в зависимости от того, есть ли на отрезке $v_1(x, z)$ вершины пути q.

2.2.1. На отрезке $v_1(x, z)$ нет вершин пути q. См. рис. 20. Тогда $f(q``) = x$. Но $x <_p a$, что противоречит минимальности финальной пары w_a и w_b.

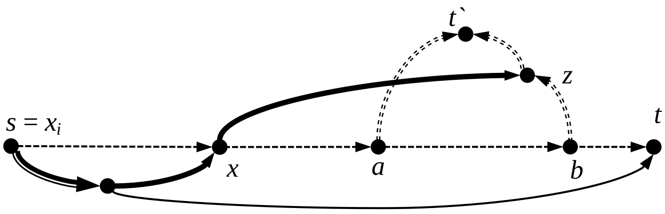


Рис. 20. Иллюстрация к доказательству леммы 11, п. 2.2.1: Вершина z не лежит на пути w_a.
Некоторые внутренние вершины пути $w = v_i(x, z) \cdot w_a(z, t`)$, $i = 1$, лежат на пути q, но не на отрезке $v_1(x, z)$.

2.2.2. На отрезке $v_1(x, z)$ есть вершины пути q. См. рис. 21. Тогда для последней такой вершины u имеет место $f(q``) = u$. А это значит, что $f(q``)$ лежит на пути q, а $f(p``) = b$ лежит на пути p, что противоречит рассматриваемому СЛУЧАЮ 2 в доказательстве теоремы 3.

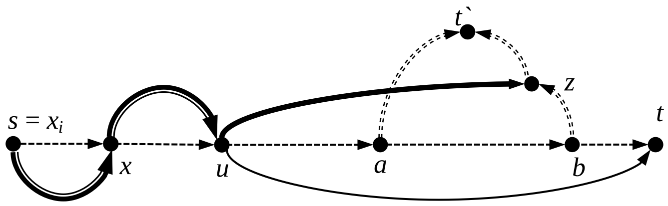


Рис. 21. Иллюстрация к доказательству леммы 11, п. 2.2.2: Вершина z не лежит на пути w_a.
Некоторые внутренние вершины пути $w = v_i(x, z) \cdot w_a(z, t`)$, $i = 1$, лежат на пути q и на отрезке $v_1(x, z)$.

Поскольку в обоих случаях 2.2.1 и 2.2.2 мы пришли к противоречию, тем самым, мы пришли к противоречию в случае 2.2. Поскольку в обоих случаях 2.1 и 2.2 мы пришли к противоречию, тем самым, мы пришли к противоречию в случае 2.

Тем самым, мы пришли к противоречию в обоих случаях 1 и 2, и лемма доказана.

□

Продолжим доказательство теоремы 3. По лемме 10 имеются вершинно-простой путь $q^{\wedge} = v_1 \cdot r_3 \cdot v_3 \cdot r_5 \cdot v_5 \cdot r_7 \cdot \ldots$, состоящий из $x_i y_i$-арок v_i, где i нечётное и $1 \leq i \leq k$, и $y_{i-2} x_i$-связок r_i, где i нечётное и $3 \leq i \leq k + 2$, и вершинно-простой путь $p^{\wedge} = r_2 \cdot v_2 \cdot r_4 \cdot v_4 \cdot r_6 \cdot v_6 \cdot \ldots$, состоящий из $y_{i-2} x_i$-связок, где i чётное и $2 \leq i \leq k + 2$, и $x_i y_i$-арок v_i, где i чётное и $2 \leq i \leq k$; эти пути начинаются в вершине s; один из них заканчивается в вершине a, а другой в вершине b, и эти пути не пересекаются по рёбрам. Продолжим эти пути финалями, т.е. рассмотрим пути q^* и p^*, которые определим так: если k нечётное, то $q^* = q^{\wedge} \cdot w_b$ и $p^* = p^{\wedge} \cdot w_a$; если k чётное, то $q^* = q^{\wedge} \cdot w_a$ и $p^* = p^{\wedge} \cdot w_b$. См. рис. 15. Докажем следующую лемму.

Лемма 12. Пути q^* и p^* 1) ведут из вершины s в вершину $t`$, 2) вершинно-простые, 3) не пересекаются по рёбрам.

<u>Доказательство</u>.

1) Поскольку пути $q^{\wedge}$ и $p^{\wedge}$ начинаются в вершине s, пути q^* и p^* также начинаются в вершине s. Поскольку финали w_a и w_b заканчиваются в вершине $t`$, пути $q^*$ и $p^*$ также заканчиваются в вершине $t`$.

2) Поскольку пути $q^\wedge$, $p^\wedge$, w_a, w_b вершинно-простые, достаточно показать, что финали не имеют общих вершины с арками и связками, за исключением вершин, по которым происходит конкатенация путей $q^\wedge$ и $p^\wedge$ с финалями w_a и w_b. По лемме 11 каждая арка v_i, $i = 1..k$, не имеет общих вершин с финалью w_a, за исключением допустимого случая $i = k$, $y_k = a$, и с финалью w_b, за исключением допустимого случая $i = k$, $y_k = b$. Поскольку только начала a и b финалей w_a и w_b лежат на пути p, эти финали не имеют общих вершин со связками, за исключением допустимых случаев, когда конец арки r_{k-1} совпадает с началом a финали w_a и конец арки r_k совпадает с началом b финали w_b. Отсюда следует, что пути q^* и p^* вершинно-простые.

3) Пути $q^\wedge$ и $p^\wedge$ не пересекаются по рёбрам. По предыдущему п. 2 каждая финаль w_a или w_b имеет с путём $q^\wedge$ или $p^\wedge$ не более одной общей вершины, тем самым финали w_a и w_b не пересекаются по рёбрам с путями $q^\wedge$ и $p^\wedge$. По определению финали w_a и w_b не пересекаются друг с другом по рёбрам. Таким образом, пути q^* и p^* не пересекаются по рёбрам.

□

Продолжим доказательство теоремы 3. Обозначим $R = \{p, q, p^*, q^*\}$. Докажем следующую лемму.

Лемма 13. Пути из замыкания по дугам $R\downarrow\uparrow$ вершинно-простые.

Доказательство. Рассмотрим произвольный путь r из замыкания по дугам $R\downarrow\uparrow$.

Поскольку пути p, q, p^*, q^* начинаются в вершине s и заканчиваются в вершине t (p и q) или в вершине $t`$ ($p^*$ и $q^*$), путь $r$ — это $st$-путь или $st`$-путь.

Пути p и q вершинно-простые по их определению. Пути p^* и q^* вершинно-простые по лемме 12. Следовательно, нужно рассмотреть новые пути, порождаемые в замыкании $R\downarrow\uparrow$.

Пути p и q не имеют общих рёбер (и, следовательно, общих дуг) по определению. Связки, как отрезки пути p, не имеют общих рёбер (и, следовательно, общих дуг) с путём q. По определению финали w_a и w_b не имеют общих рёбер (и, следовательно, общих дуг) с путём q. По лемме 10 из всех арок только арка v_1 может иметь общие рёбра (и дуги) с путём q и только на их общем префиксе. Поэтому из двух путей p^* и q^* только один путь может иметь с путём q общие дуги, а именно путь q^*, который начинается аркой v_1. Поскольку пути q и q^* имеют общие дуги только на их общем префиксе, замыкание по дугам этих путей не порождает новых путей. По лемме 12 пути p^* и q^* не имеют общих рёбер (и, следовательно, общих дуг). Таким образом, новые пути могут порождаться только в замыкании $\{p, p^*, q^*\}\downarrow\uparrow$ и только по дугам пути p, т.е. замыкание двух путей по общей дуге может породить новые пути только в том случае, когда эта дуга является дугой пути p.

Пусть путь r — это путь из замыкания $\{p, p^*, q^*\}\downarrow\uparrow$. Тогда его можно представить в виде $r = o_1\cdot...\cdot o_m$, $m \geq 1$, где каждый отрезок o_i, $i = 1..m$, является непустым прямым отрезком пути p, p^* или q^*. Будем считать, что два соседних отрезка o_i и o_{i+1}, $i = 1..m - 1$, являются отрезками разных путей p, p^*, q^* (в противном случае их можно заменить конкатенаций-по-дугам $o_i\cdot o_{i+1}$, являющейся отрезком того же пути p, p^* или q^*, соответственно). Постфиксом последнего отрезка o_m является финаль w_a или w_b, если путь r — это $st`$-путь, или непустой постфикс пути p, если путь r — это st-путь.

Покажем, что путь r не может пересекаться сам с собой в вершине, не лежащей на пути p. Действительно, если вершина не лежит на пути p, то это внутренняя вершина арки или вершина финали, отличная от её начальной вершины (a или b).

1) По лемме 3 разные арки не имеют общих вершин, 2) по лемме 11 арка и финаль не имеют общих вершин, кроме допустимого случая, когда последняя арка v_k заканчивается в вершине b, лежащей на пути p, 3) разные финали не входят в один путь из замыкания $R\downarrow\uparrow$, поскольку могут быть только постфиксами такого пути. Следовательно, путь r не может пересекаться сам с собой в вершине, не лежащей на пути p.

Покажем, что путь r не может пересекаться сам с собой в вершине, лежащей на пути p.

Отрезок o_m можно представить в виде $o_m = o_m`\cdot o_m``$, где $o_m``$ определяется следующим образом. Если постфиксом пути r является финаль w_a, $o``_m = w_a$. Если постфиксом пути $r$ является финаль $w_b$ и $y_k \leq_p b$, $o``_m = w_b$. Если постфиксом пути r является финаль w_b и $y_k >_p b$, $o``_m = p(y_k, b)\cdot w_b$ (отрезок $p(y_k, b)$, если $y_k >_p b$, является обратным отрезком пути $p$). Если постфиксом пути $r$ является постфикс пути $p$, $o_m`` = p(t, t)$, т.е. это пустой отрезок в вершине t. В любом случае по определению p^* и q^* и по лемме 2 все отрезки пути p, вложенные в отрезок o_i, $i = 1..m - 1$, или отрезок $o`_m$, являются прямыми отрезками пути $p$, а последовательность общих вершин пути $p$ и пути $o_1\cdot...\cdot o_{m-1}\cdot o`_m$ является строго возрастающей по отношению «$<_p$». Отсюда следует, что путь $o_1\cdot...\cdot o_{m-1}\cdot o`_m$ не пересекается сам с собой по вершинам, лежащим на пути p.

Рассмотрим постфикс $o_m``$. Если $o_m`` = w_a$ или $o_m`` = w_b$, то $o_m``$ имеет с путём p одну общую вершину a или b, соответственно. По этой вершине происходит конкатенация $o_m = o_m`\cdot o_m``$, поэтому в этом случае путь $r = o_1\cdot...\cdot o_m$ вершинно-простой. Если $o_m`` = p(t, t)$, то $o_m = o`_m$, поэтому в этом случае путь $r = o_1\cdot...\cdot o_m$ вершинно-простой. Если $o``_m = p(y_k, b)\cdot w_b$, то $y_k >_p b$ и отрезок $p(y_k, b)$ является обратным отрезком пути p. В этом случае постфиксом отрезка $o`_m$ является арка v_k. Однако по определению цепи арок $a \leq_p b$, поэтому в случае $y_k >_p b$ будет $a <_p y_k$. Последняя арка v_k имеет с отрезком $p(a, y_k)$ только одну общую вершину y_k, по которой происходит конкатенация $p(y_k, b)\cdot w_b$. Остальные арки и отрезки пути p, вложенные в путь r, очевидно, не имеют общих вершин с отрезком $p(y_k, b)$. Тем самым, и в этом случае путь $r = o_1\cdot...\cdot o_m$ вершинно-простой.

□

Завершение доказательства теоремы 3. Совокупность последних двух лемм (лемма 12 и лемма 13) доказывают теорему 3.

□

Резюме.

Таким образом, если в графе для трёх попарно разных хостов s, t и $t`$ есть пара рёберно непересекающихся $st$-путей и пара рёберно непересекающихся $st`$-путей, то эти пути можно выбрать вершинно-простыми (теорема 1) и такими, что в замыкании по дугам множества этих четырёх путей все пути также вершинно-простые (теорема 3), т.е. зацикливание не возникает. При этом одна пара таких путей, например, st-путей p и q может быть любая, а другую пару st`-путей p^* и q^* можно построить следующим образом.

Пусть p` и $q$` пара вершинно-простых рёберно непересекающихся st`-путей. Начало постфикса пути $p$` (q`), начинающегося в вершине на пути $p$ или $q$, все остальные вершины которого не лежат на путях $p$ и $q$, обозначим $f(p`)$ (соответственно, $f(q`)$).

1. Пусть одна из вершин, например, $f(p`)$ лежит на пути $p$, а другая вершина $f(q`)$ лежит на пути q. В частности, допустимо $f(p`) = s$ и/или $f(q`) = s$. Тогда пути $p^* = p(s, f(p`))\cdot p`(f(p`), t`)$ и $q^* = q(s, f(q`))\cdot q`(f(q`), t`)$ являются искомыми путями.
2. В противном случае для любой пары вершинно-простых рёберно непересекающихся st`-путей $p$` и q` вершины $f(p`)$ и $f(q`)$ лежат только на одном из путей $p$ или $q$. Пусть для определённости $f(p`)$ и $f(q`)$ лежат на пути $p$ и $f(p`) \leq_p f(q`) <_p t$. Рассмотрим финальные пары — пары вершинно-простых рёберно непересекающихся путей: $at$`-путь w_a и bt`-путь $w_b$ такие, что все их вершины не лежат на пути $q$ и только их начальные вершины $a$ и $b$ лежат на пути $p$, причём $a \leq_p b <_p t$. (В частности, такой финальной парой является пара $w_a = p`(f(p`), t`)$ и $w_b = q`(f(q`), t`)$.) Среди финальных пар путей выберем такую пару, для которой вершина a ближайшая к началу s пути p. По лемме 10 (рис. 15) для пути p построим цепь арок (обходных путей) $v_1, \ldots, v_k$, $k \geq 1$, где арка v_i, $i = 1..k$, является x_iy_i-путём, обходящим первую дугу пути p, если $i = 1$ ($x_1 = s$), или первую дугу пути p, начинающуюся в конце y_{i-1} предыдущей арки v_{i-1}, если $i > 1$. Рассмотрим вершинно-простые пути $q^\wedge = v_1\cdot p(y_1, x_3)\cdot v_3\cdot p(y_3, x_5)\cdot\ldots$ с нечётными индексами арок и $p^\wedge = p(s, x_2)\cdot v_2\cdot p(y_2, x_4)\cdot\ldots$ с чётными индексами арок, один из которых заканчивается в вершине a, а другой – в вершине b. Тогда искомыми путями являются пути $q^* = q^\wedge\cdot w_b$ и $p^* = p^\wedge\cdot w_a$, если k нечётное, или $q^* = q^\wedge\cdot w_a$ и $p^* = p^\wedge\cdot w_b$, если k чётное.

6. Заключение

В статье рассматривается проблема живучести распределённой системы. Распределённая система моделируется неориентированным графом, вершины которого моделируют вычислительные узлы (хосты) и коммутирующие узлы (коммутаторы). Под живучестью понимается способность системы продолжать функционирование после выхода из строя ребра (рёбер) графа, а под функционированием понимается способность передавать сообщения от хостов-отправителей хостам-получателям. Одним из решений проблемы живучести является использование дублирующих путей. В статье рассмотрен случай, когда сообщение посылается от одного хоста-отправителя двум хостам-получателям. Доказаны три теоремы. Теорема 1 показывает, что достаточно рассматривать только вершинно-простые пути. Теорема 2 показывает, что если для каждого ребра заданного пути существует дублирующий путь, обходящий это ребро, то существуют два рёберно непересекающиеся пути с теми же началом и концом. Теорема 3 о четырёх путях показывает, что если для каждого из двух хостов-получателей существуют два непересекающихся по рёбрам пути из хоста-отправителя в этот хост-получатель, то можно выбрать эти четыре пути такие, что зацикливание сообщений не возникает. В доказательстве теоремы предлагается подход к выбору таких путей. В частности, в двусвязном графе для каждой пары отправитель-получатель можно выбрать такую пару рёберно непересекающихся путей, что на множестве всех таких путей не возникает зацикливание.

Остаётся открытым вопрос о том, при каких условиях можно избежать зацикливания в общем случае, когда число хостов-получателей больше двух. Другим направлением исследований может быть использование не дублирующих, а резервных путей. Имеется в виду, что для каждого пути строится рёберно непересекающийся с ним резервный путь с теми же началом и концом, и при выходе из строя любых рёбер основного пути контроллер (устройство, осуществляющее настройку коммутаторов) перенастраивает коммутаторы так, чтобы вместо основного пути использовался резервный путь. В этом случае требование отсутствия зацикливания ослабляется: требуется, чтобы зацикливание не возникало не на всём множестве основных и резервных путей, а только на любом подмножестве, в которое для каждой пары хостов отправитель-получатель входит только один путь: основной или резервный. Ещё одно направление дальнейших исследований может быть связано с ограничением на выбор путей, когда выбираться должны некоторые оптимальные пути, т.е. пути с заданными свойствами (помимо того, что они не пересекаются по рёбрам).

Список литературы / References

[1]. Голуб Б.В., Кузнецов Е.М., Максимов Р.В. Методика оценки живучести распределенных информационных систем // Вестник СамГУ. 2014. №7 (118). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metodika-otsenki-zhivuchesti-raspredelennyh-informatsionnyh-sistem (дата обращения: 09.10.2024).

[2]. Харари Ф. Теория графов М.,2003.

[3]. И.Б. Бурдонов, Н.В. Евтушенко, А.С. Косачев. Тестирование правил настройки сетевого коммутатора программно-конфигурируемой сети. Труды Института системного программирования РАН, том 30-6, 2018, стр. 69-88.

[4]. Igor B. Burdonov, Alexandre Kossachev, Nina Yevtushenko, Jorge López, Natalia Kushik, Djamal Zeghlache. Verifying SDN Data Path Requests. CoRR abs/1906.03101 (2019).

[5]. Igor Burdonov, Nina Yevtushenko, Alexandr Kossachev. Implementing a Virtual Network on the SDN Data Plane. Proceedings 2020 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS). Varna, Bulgaria, September 4 – 7, 2020. pp. 279-283. ISBN: 978-1-7281-9898-9.

[6]. Burdonov, I.; Kossachev, A.; Yevtushenko, N.; López, J.; Kushik, N. and Zeghlache, D. (2021). Preventive Model-based Verification and Repairing for SDN Requests. In Proceedings of the 16th International Conference on Evaluation of Novel Approaches to Software Engineering - ENASE, ISBN 978-989-758-508-1 ISSN 2184-4895, pages 421-428. DOI: 10.5220/0010494504210428

[7]. Nash-Williams C. St. J. A. Edge-disjoint spanning trees of finite graphs // J. London Math. Soc. 1961. P. 445–450.

[8]. И.Б. Бурдонов, Н.В. Евтушенко, А.С. Косачев. Тестирование правил настройки сетевого коммутатора программно-конфигурируемой сети. Труды Института системного программирования РАН, том 30-6, 2018, стр. 69-88.

[9]. Burdonov I, Kossachev A, Yevtushenko N, López J, Kushik N and Zeghlache D 2019 Verifying SDN Data Path Requests CoRR abs/1906.03101 (2019)

Информация об авторах / Information about authors

Игорь Борисович БУРДОНОВ – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник ИСП РАН. Научные интересы: формальные спецификации, генерация тестов, технология компиляции, системы реального времени, операционные системы, объектно-ориентированное программирование, сетевые протоколы, процессы разработки программного обеспечения.

Igor Borisovich BURDONOV – Dr. Sci. (Phys.-Math.), a Leading Researcher of ISP RAS. Research interests: formal specifications, test generation, compilation technology, real-time systems, operating systems, object-oriented programming, network protocols, software development processes.

Нина Владимировна ЕВТУШЕНКО, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник ИСП РАН, до 1991 года работала научным сотрудником в Сибирском физико-техническом институте. С 1991 г. работала в ТГУ профессором, зав. кафедрой, зав. лабораторией по компьютерным наукам. Её исследовательские интересы включают формальные методы, теорию автоматов, распределённые системы, протоколы и тестирование программного обеспечения.

Nina Vladimirovna YEVTUSHENKO, Dr. Sci. (Tech.), Professor, a Leading Researcher of ISP RAS, worked at the Siberian Scientific Institute of Physics and Technology as a researcher up to 1991. In 1991, she joined Tomsk State University as a professor and then worked as the chair head and the head of Computer Science laboratory. Her research interests include formal methods, automata theory, distributed systems, protocol and software testing.

Александр Сергеевич КОСАЧЕВ – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИСП РАН. Научные интересы: формальные спецификации, генерация тестов, технология компиляции, системы реального времени, операционные системы, объектно-ориентированное программирование, сетевые протоколы, процессы разработки программного обеспечения.

Alexander Sergeevitch KOSSATCHEV – Cand. Sci. (Phys.-Math.), a Leading Researcher of ISP RAS. Research interests: formal specifications, test generation, compilation technology, real-time systems, operating systems, object-oriented programming, network protocols, software development processes.